Министерство образования и науки Российской Федерации

Сыктывкарский лесной институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет имени С. М. Кирова»

КАФЕДРА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

А. М. Карпов, С. В. Лисицкий

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Утверждено учебно-методическим советом Сыктывкарского лесного института в качестве учебного пособия для студентов технических специальностей и направлений бакалавриата всех форм обучения

Учебное электронное издание на компакт-диске

СЫКТЫВКАР 2012

УДК 514.18
ББК 22.151
К26

Утверждено к изданию редакционно-издательским советом
Сыктывкарского лесного института

Авторы: **А. М. Карпов**, доцент;
С. В. Лисицкий, преподаватель

Отв. редактор: **З. И. Кормщикова**, кандидат технических наук, заведующая кафедрой технической механики Сыктывкарского лесного института

Рецензенты:
кафедра методики обучения технологии и предпринимательству
(Коми государственный педагогический институт);
О. С. Головатая, кандидат технических наук, доцент
(Сыктывкарский государственный университет)

Учебное пособие включает основные положения теоретического курса по начертательной геометрии и предназначено для самостоятельной проработки студентами. Теоретические положения сопровождаются примерами решения задач.

Издание предназначено для студентов всех форм обучения технических специальностей и направлений бакалавриата при изучении ими дисциплины "Начертательная геометрия".

Сыктывкарский лесной институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет имени С. М. Кирова» (СЛИ)
167982, г. Сыктывкар, ул. Ленина, 39
E-mail: institut@sfi.komi.com
www.sli.komi.com

Темплан 2010/11 учеб. г. Изд. № 47.

Редакционно-издательский отдел СЛИ. Заказ № 8.

ISBN 978-5-9239-0314-0

Оглавление

Условные обозначения

1. Плоскости проекций:
   горизонтальная – H;
   фронтальная – V;
   профильная – W.
2. Точки – A, B, C, D, … или 1, 2, 3, 4, …
3. Плоскости в пространстве – P, Q, F, M, …
4. Проекции точек на плоскость:
   H – a, b, c, d, … ;
   V – a', b', c', d', … ;
   W – a'', b'', c'', d'', …
5. Точки, лежащие на поверхности тела или невидимые проекции точек – (A), (B), (C), (D), …, (a), (b), (c), (d), …, (a'), (b'), (c'), (d'), …, (a''), (b''), (c''), (d''), …
6. Координатные оси – x, y, z.
7. Углы наклона отрезков прямых и плоскостей к плоскости проекций:
   H – α;
   V – β;
   W – γ.
8. След плоскости:
   горизонтальный – P_H, Q_H, F_H, M_H, …;
   фронтальный – P_V, Q_V, F_V, M_V, …;
   профильный – P_W, Q_W, F_W, M_W, …;
9. Символы:
   включение – $\subset$, $\supset$;
   принадлежность – $\in$;
   перпендикулярность – $\perp$;
   пересечение – $\cap$;
   параллельность – $||$;
   совпадение, тождество – $\equiv$;
   точка – $(\cdot)$.

Введение

Данное учебное пособие предназначено для самостоятельного изучения студентами курса начертательной геометрии.

Начертательная геометрия является грамматикой чертежа, дает правила изображения на плоскости какого-либо предмета, а также способы и методы решения пространственных задач. При решении таких задач развивается пространственное вооображение будущего специалиста (инженера).

Начертательная геометрия – инженерная дисциплина, представляющая трехмерный геометрический аппарат и набор алгоритмов для исследования свойств геометрических объектов.

Практически начертательная геометрия ограничивается исследованием объектов трехмерного евклидова пространства. Исходные данные должны быть представлены в виде двух независимых проекций. В большинстве задач и алгоритмов используются две ортогональные проекции на взаимно перпендикулярные плоскости.

Всякий мастер, будь то плотник, слесарь, токарь, каменотес и т. д., может выполнить заказанное изделие по желанию заказчика только в том случае, если ему будет дан совершенно такое же изделие на образец, либо его модель, либо конструкторский чертеж, по которому легко и точно определялись бы размеры всех начерченных линий, хотя бы и таких, которые удаляются вглубь картины и потому изображаются сокращенными. Начертательная геометрия учит изготовлению таких чертежей, в которых предмет изображается почти таким, каким мы его видим, и при том так, что по начерченным линиям можно в точности определить размеры и истинный вид изображаемого предмета.

Решение задач графически легче, чем аналитически. В общем случае используются следующие изображения предмета.

Обычный рисунок, который изображает предмет, как он представляется глазу наблюдателя.

Способ перспективного изображения, основанный на методе центрального или конического проецирования.

Чертеж, состоящий из прямоугольных (ортогональных) проекций, по методу параллельного проецирования.

Аксонометрические проекции (наглядное изображение предмета на аксонометрической плоскости проекций).

При изучении курса начертательной геометрии необходимо использовать следующие рекомендации.

Последовательность изучения. Нужно осознать, что мы имеем дело с проекциями или изображениями (на эпюре или чертеже нет самого геометрического объема точки, прямой, плоской фигуры, геометрического тела).

Систематичность и регулярность занятий в течение всего семестра.

Упрощения в изображениях следует выполнять не от руки, а с помощью чертежных инструментов.

Никогда не следует выполнять графические изображения в мелком масштабе – чертеж должен быть аккуратным, четким и ясным.

При решении графических задач построение проекции точки необходимо сразу обозначать на всех проекциях.

Желательно использовать карандаши в цвете (пример: разделять проекции от линий связи; линии пересечения; линии перехода и др.).

В затруднительных случаях можно строить наглядные изображения, выполнять макеты (объемные модели).

Проецирование – это процесс отображения геометрических образов предметов путем проведения проецирующих лучей через характерные точки (предмета) до пересечения с ортогональными плоскостями проекций.

Тема 1 Методы проецирования

1.1 Краткая историческая справка

С древних времен человек пытался сохранить образ увиденного объекта. Так появилась наскальная живопись. Затем человек стал украшать рисунками стены своего жилища, посуду, орудия труда и другие предметы быта. Цивилизация развивалась, и перед человеком стали возникать все более серьезные технические задачи: составление схем и карт местности, изображение военных сооружений и жилых домов, мостов, орудий и предметов труда. Различные сферы человеческой деятельности, развитие производства требовали выработки неких общих правил и стандартов представления пространственной информации на плоскости.

Еще греческие и римские ученые, начав с изучения перспективы, пытались выработать некоторые правила представления имеющейся информации. В эпоху Возрождения начинается расцвет архитектуры, скульптуры, живописи, что приводит к разработке теоретических основ перспективы. Основателем теоретической перспективы был итальянский ученый Л. Альберти (1404 – 1472). Гениальный итальянский ученый и художник Леонардо да Винчи (1452 – 1519) дополнил линейную перспективу учением "Об уменьшении цветов и отчетливости очертаний". Французский математик и архитектор Ж. Дезарг (1593 – 1662) впервые применил для построения перспективы метод координат, положив этим начало аксонометрическому методу в начертательной геометрии. В 1795 году вышел труд "Начертательная геометрия" Гаспара Монжа (1746 – 1818), где он систематизировал и обобщил накопленный годами опыт геометрических построений, систематизировал метод проекций, ввел понятие "комплексный чертеж".

Развитию начертательной геометрии в нашей стране способствовали такие художники, зодчие и ученые, как А. Рублёв, В. Баженов, А. Воронихин, И. Ползунов, И. Кулибин и другие. Первым русским профессором начертательной геометрии был Я. А. Севостьянов (1796 – 1849), который создал оригинальный курс начертательной геометрии. Далее начертательная геометрия развивалась, открывая такие имена, как Н. И. Макаров, В. И. Курдюмов, А. К. Власов, Н. А. Глаголев, Н. Ф. Четверухин и многие другие.

Начертательная геометрия проделала многотысячелетний путь от рисунка на песке, от древнеегипетской ортогональной живописи до современных систем автоматизированного проектирования, трехмерного моделирования и анимации.

1.2 Основы метода проецирования

I. Центральное (коническое) проецирование

Центральное проецирование – наиболее общий случай получения проекций геометрических образов.

Рассмотрим метод центрального проецирования (рис. 1).

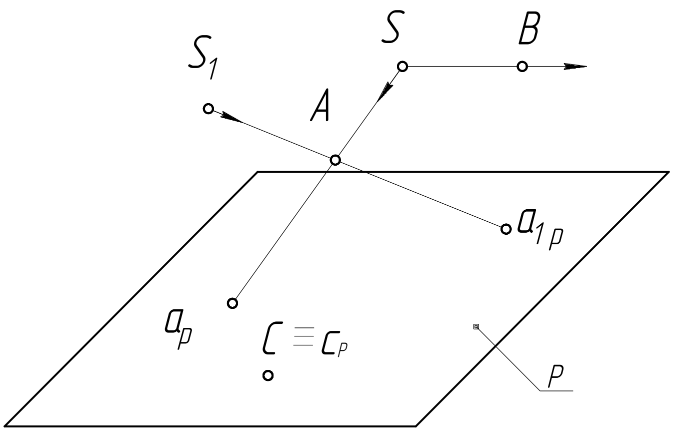


Рисунок 1 – Центральное проецирование

На рис. 1 обозначены P – плоскость проекций; (·) S – центр проецирования, который не принадлежит плоскости P; (·) A – объект проецирования.

Для построения проекций (·) A на плоскости P проводим проецирующий луч S до пересечения с плоскостью проекций P. Точка пересечения проецирующего луча S с плоскостью проекций P называется проекцией a_p точки A. Сами точки обозначаем прописными буквами латинского алфавита, а их проекции строчными буквами с индексом плоскости проекций.

Одна проекция точки не определяет ее положения в пространстве (информация не полная), тогда выбираем еще один центр проецирования точки A (S_1) и получаем вторую проекцию (·) A – a_p.

Две проекции (·) A определяют ее положение относительно плоскости проекций. Если (·) C принадлежит плоскости проекций P, то ее проекция c_p на плоскость P совпадает с самой точкой. $C \in P$, тогда $C \equiv c_p$.

Проецирующий луч точки B параллелен плоскости проекций, в этом случае положение проекции (·) B нельзя определить на плоскости P.

При центральном проецировании происходит искажение форм и размеров элементов предмета, поэтому в машиностроении применяется редко, но т. к. дает наглядное представление об изображаемом предмете, им пользуются художники, архитекторы, строители. В машиностроении применяется параллельное (ортогональное) проецирование.

II. Параллельное проецирование

Параллельное проецирование является частным случаем центрального проецирования, когда центр проекций находится в бесконечно удаленной точке. Тогда можно считать, что проецирующие лучи параллельны между собой (рис. 2).

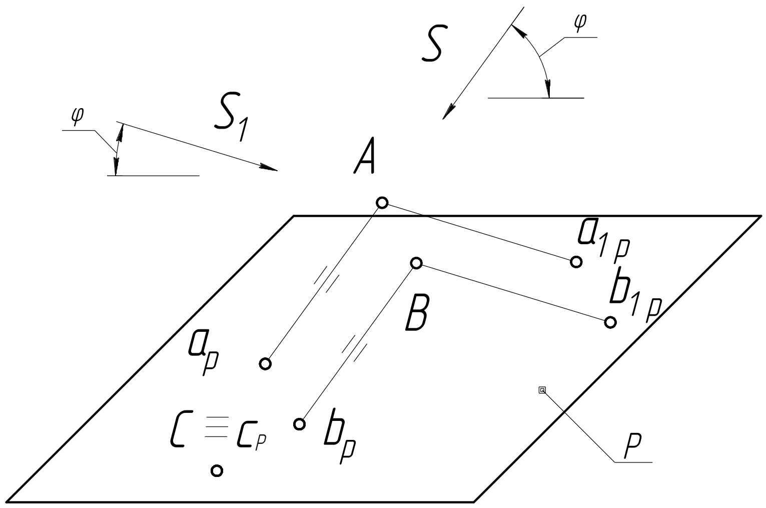


Рисунок 2 – Параллельное проецирование

1. Известна плоскость проекций *P*.

2. Дано направление луча проецирования *S*. Зная, что одна проекция точки не определяет ее положение в пространстве, произвольно выбираем еще один центр проецирования $(\cdot)S_1$.

До этого мы рассматривали косоугольное проецирование, когда проецирующие лучи располагались под углом, отличным от 90^0 к плоскости проекций.

Если мы выбираем угол проецирующих лучей $\varphi = 90°$, то получаем ортогональное, или прямоугольное, проецирование (рис. 3), проецирующие лучи перпендикулярны ($\perp$) плоскости проекций *P*.

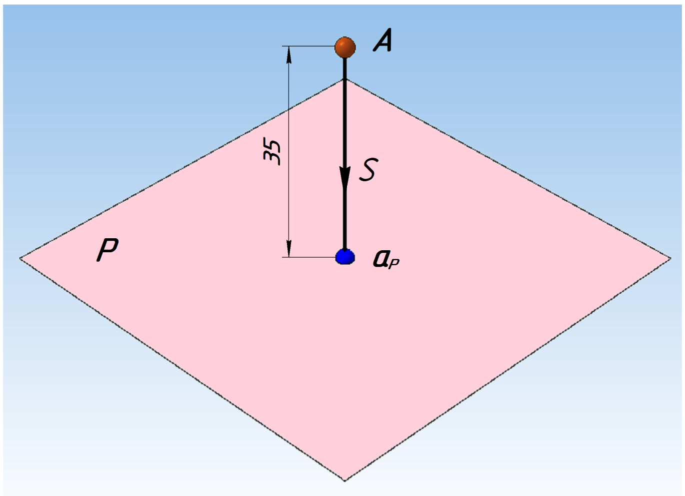


Рисунок 3 – Проекция точки *A* на плоскость *P*

$Aa_p \perp$ P. В связи с тем, что мы выбрали направление проекции перпендикулярно плоскости *P*, то вторую проекцию точки получить невозможно, но можно определить расстояние от $(\cdot)$ *A* до плоскости *P* (+35).

Численное значение 35 – абсолютное значение, над плоскостью *P* берется со знаком «плюс», под плоскостью *P* со знаком «минус».

Это проекции с числовыми отметками (например, топографические карты).

III. Прямоугольное, или ортогональное, проецирование. Четверти и октанты пространства

Метод ортогонального проецирования был предложен в конце XVIII веке французским графиком Гаспаром Монжем.

Проецирование точки на взаимно перпендикулярные плоскости проекций V и H показано на рис. 4, где плоскость V – верхняя пола фронтальной плоскости проекций; плоскость V_1 – нижняя пола фронтальной плоскости проекций; плоскость H – передняя пола горизонтальной плоскости проекций; плоскость H_1 – задняя пола горизонтальной плоскости проекций. Введем систему трех взаимно перпендикулярных координатных осей $x \perp y \perp z$. Возьмем $(\cdot)$ A в пространстве двухгранного угла, образованного плоскостями проекций V и H.

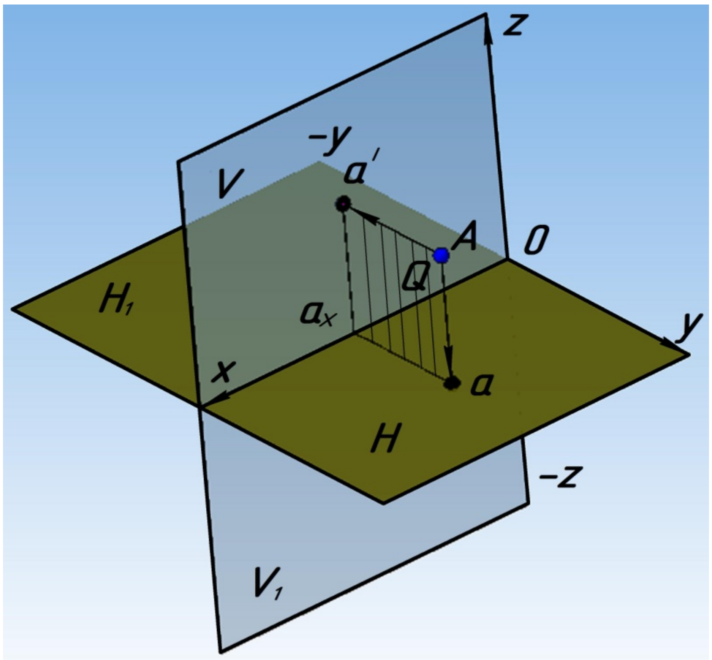


Рисунок 4 – Проецирование точки на взаимно перпендикулярные плоскости проекций V и H

Для построения проекций $(\cdot)a$ и $(\cdot)a'$ из точки A опускаем проецирующие лучи перпендикулярно плоскостям V и H.

Через два проецирующих луча, проведенных от $(\cdot)$ A на плоскости проекций V и H проводим плоскость Q.

Так как $V \perp H$, а плоскость $Q \perp H$ и $Q \perp V$, то плоскость Q $\perp$ оси x; плоскость Q пересекает ось x в точке a_x; $a_x a \perp x$, $a'a_x \perp x$.

– $Aa' = aa_x = y_a$ – координата y_a определяет положение $(\cdot)$ A относительно плоскости V.
– $Aa = a'a_x = z_a$ – координата z_a определяет положение $(\cdot)$ A относительно плоскости H.

Получено наглядное пространственное изображение точки A (рис. 4) или проецирующий аппарат, а нам необходимо получить плоскостное изображение. Следовательно, необходимо преобразовать наглядное изображение (проецирующий аппарат в системе двух плоскостей V, H) в плоскость. Для этого поворачиваем горизонтальную плоскость проекций H вокруг оси x (рис. 5). Передняя пола (половина) H опускается вниз, а задняя пола H_1 – вверх. Фронтальная плоскость проекций остается на своем месте.

Таким образом, изображение проецирующего аппарата, при котором плоскости проекций совмещены с фронтальной плоскостью проекций и плоскостью чертежа, называется эпюром (эпюрой), или чертежом.

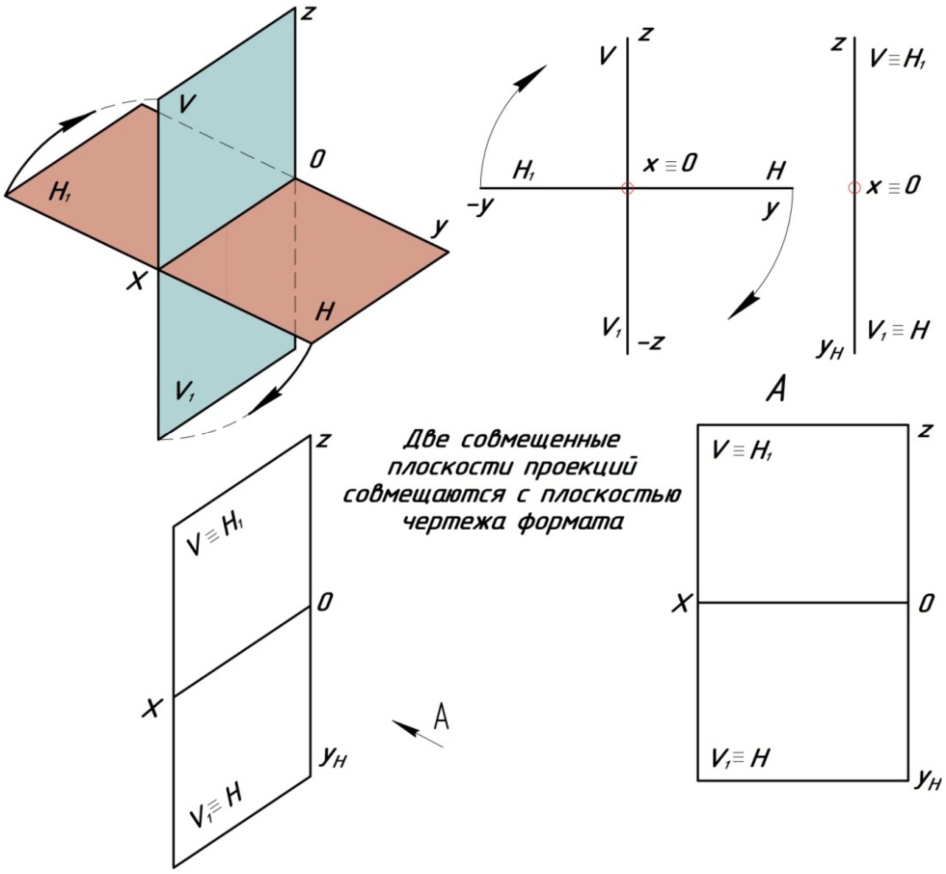


Рисунок 5 – Преобразование проецирующего аппарата в системе двух плоскостей проекций

Две взаимно перпендикулярные плоскости проекций делят пространство на четверти. Если точки расположены перед фронтальной плоскостью проекций *V*, их координаты *y* положительны (+), если за плоскостью проекций *V,* то координаты *y* отрицательны (–) (рис. 6).

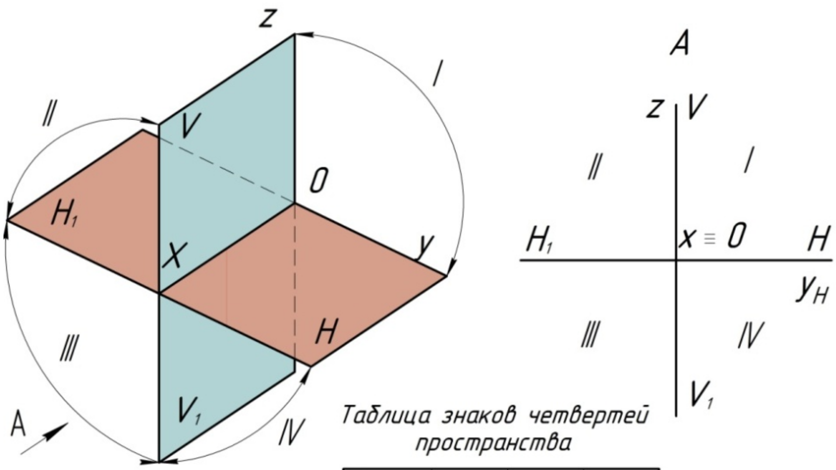


Таблица знаков четвертей пространства

Четверть	x	y	z
I	+	+	+
II	+	–	+
III	+	–	–
IV	+	+	–

Рисунок 6 – Четверти пространства

Если точки расположены над горизонтальной плоскостью проекций *H*, то их координаты *z* положительны (+), координаты точек *z* отрицательны (–), если точки расположены под горизонтальной плоскостью проекций (рис. 6).

Октанты пространства (рис. 7).

Возьмем три взаимно перпендикулярные плоскости проекции *H, V, W*. Плоскости проекций *H, V, W* (проецирующий аппарат в системе трех плоскостей проекций) делят пространство на 8 октантов.

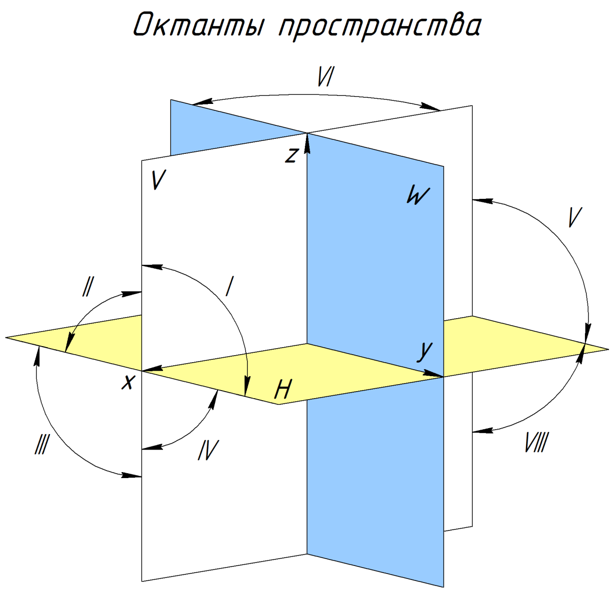


Таблица знаков октантов пространства

Четверть	x	y	z
I	+	+	+
II	+	–	+
III	+	–	–
IV	+	+	–
V	–	+	+
VI	–	–	+
VII	–	–	–
VIII	–	+	–

Рисунок 7 – Проецирующий аппарат, октанты пространства

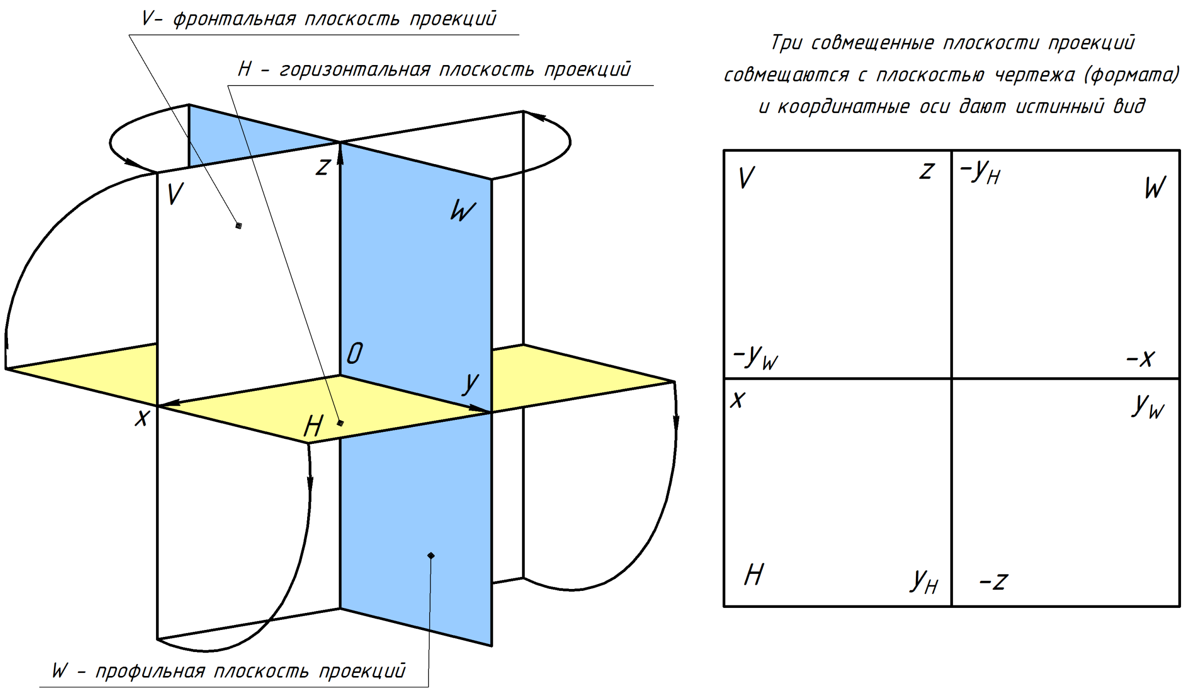


Рисунок 8 – Преобразование проецирующего аппарата в системе трех плоскостей проекций

Повернем горизонтальную плоскость проекций H вокруг оси x до совмещения с фронтальной плоскостью проекций V. Далее повернем профильную плоскость проекций W вокруг оси z до совмещения с плоскостью V и плоскостью чертежа (рис. 8).

$V \perp H$; $V \perp W$; $H \perp W$; таким образом, $V \perp H \perp W$.

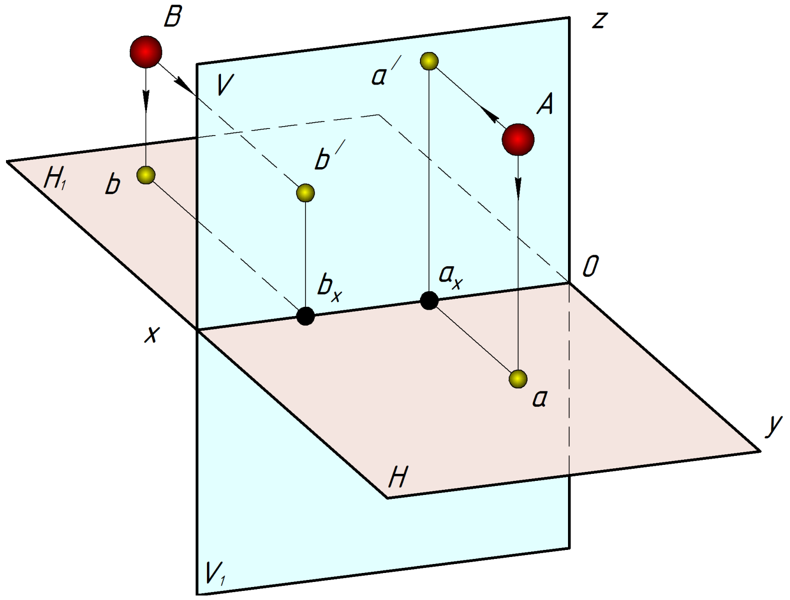
Линии пересечения трех плоскостей проекций между собой называют координатными осями.

Контрольные вопросы к теме 1

1. Как строится центральная проекция точки?
2. В каком случае центральная проекция прямой линия представляет собой точку?
3. В чем заключается способ проецирования, называемый параллельным?
4. Может ли параллельная проекция прямой линии представлять собой точку?
5. В каком случае в параллельной проекции отрезок прямой линии проецируется в натуральную величину?
6. Что означает термин "ортогональность"?
7. В чем заключается способ проецирования, называемый ортогональным?
8. Что такое система двух, трех плоскостей проекций?
9. Как называются плоскости проекций?
10. Что называется координатными осями?
11. Что такое четверти пространства, как они образованы?
12. Что такое октанты пространства?

Тема 2 Ортогональный чертеж точки

2.1 Проецирование точки в системе двух плоскостей



Известны наглядные изображения точек в диметрической прямоугольной аксонометрии (рис. 9). Требуется построить плоскостное изображение точек, рис. 13, *д*.

Рисунок 9 – Наглядное изображение точек

По правилам проецирования Наблюдатель удален в бесконечную точку. Понимая это правильно, всегда имеется объект проецирования, это предмет (деталь) или точка. Каждый предмет состоит из геометрических элементов (сферы, конуса, цилиндра, призмы и др.), а каждый элемент состоит из характерных точек, например вершина конуса, призмы, центр окружности и др. Геометрические проекции строят по этим характерным точкам.

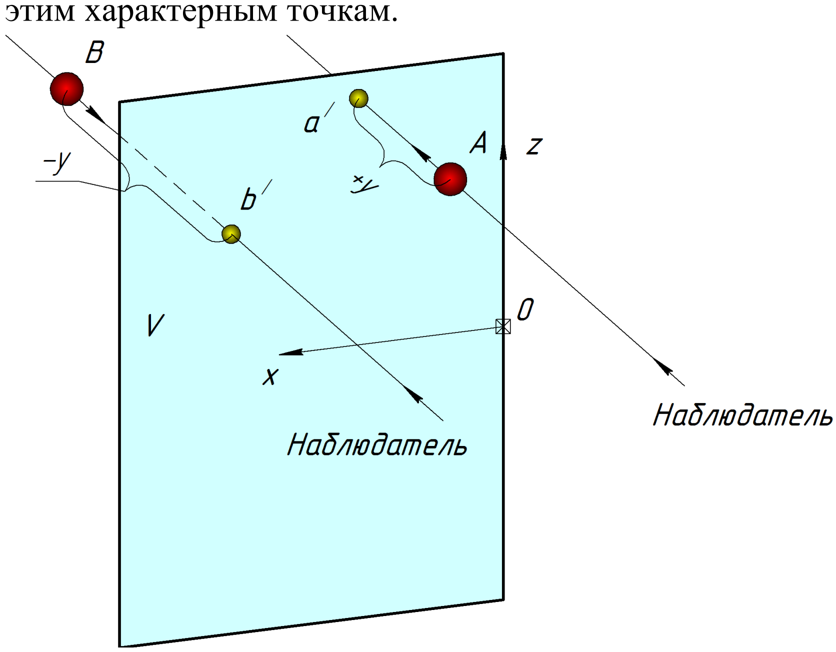


Рисунок 10 – Проецирование точек на фронтальную плоскость проекций

<u>Точка</u> – это простейший геометрический элемент пространства, точку нельзя измерить, нельзя поделить.

При ортогональном проецировании Наблюдатель всегда находится перед плоскостью проекций. В переводе с латинского языка проецировать – это кидать, бросать. Наблюдатель смотрит на фронтальную плоскость проекций <u>всегда</u> спереди (рис. 10).

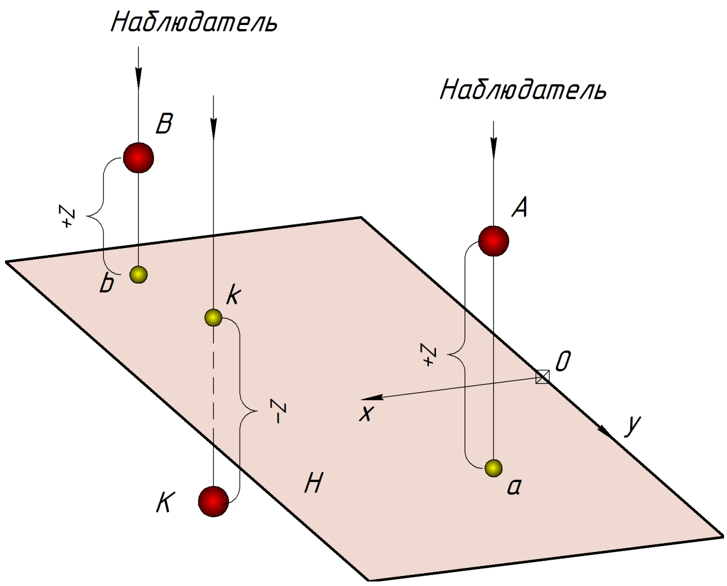


Рисунок 11 – Проецирование точек на горизонтальную плоскость проекций

Наблюдатель смотрит на горизонтальную плоскость проекций <u>всегда</u> сверху (рис. 11).

<u>ПЕРВОЕ ПРАВИЛО</u>: фронтальная и горизонтальная проекции точек всегда лежат на одном перпендикуляре к оси *x*.

Для построения эпюры необходимо знать координаты точки. Построим горизонтальную проекцию точки. Горизонтальная проекция точки определяется двумя координатами: (*x*, *y*).

Фронтальная проекция точки также определяется двумя координатами: (*x*, *z*).

Запишем координаты точек *A* и *B*. Для этого измерим на аксонометрической проекции координаты точек (*x*, *y*, *z*), рис. 12.

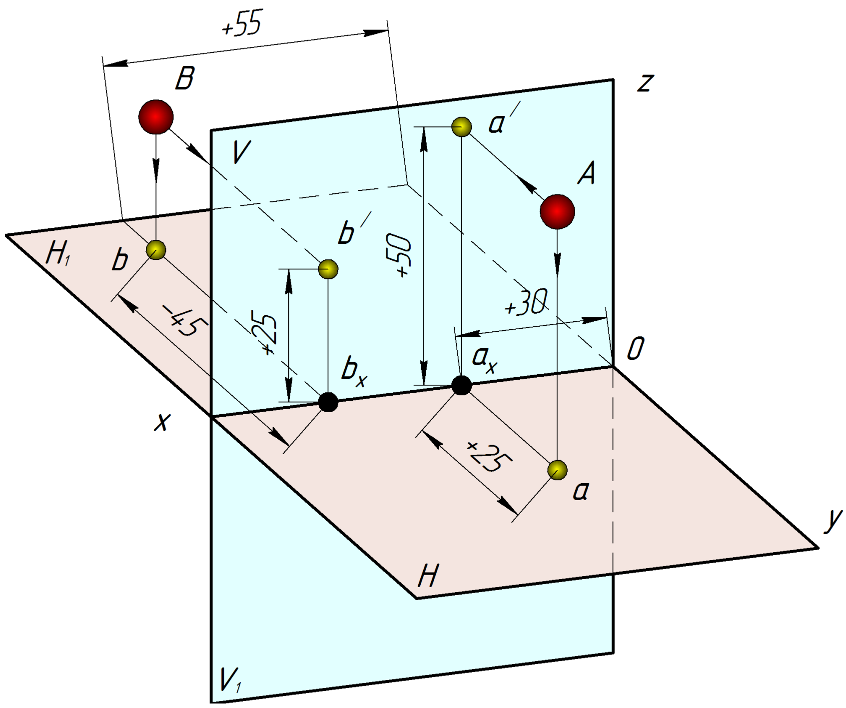


Рисунок 12 – Наглядное изображение точек

Координаты

$(\cdot)\ A\ (\overbrace{+30}^{x}, \overbrace{+25}^{y}, \overbrace{+50}^{z}) \in I$ четверти пространства, т. к. координаты точки со знаками (+) (см. рис. 7 – таблицу знаков).

Координаты

$(\cdot)\ B\ (\overbrace{+55}^{x}, \overbrace{-45}^{y}, \overbrace{+25}^{z}) \in II$ четверти пространства (см. рис. 7 – таблицу знаков).

Алгоритм построения:

а) откладываем координату *x* точки влево со знаком "+", вправо со знаком "–"; фиксируем координатную точку на оси *x* (a_x, b_x), рис. 13, *а*;

б) согласно первому правилу восстановим перпендикуляр в координатных точках, рис. 13, *б*.

в) строим горизонтальную проекцию точки, для этого откладываем координату "*y*" вниз со знаком "+", вверх со знаком "–" от координатной точки, рис. 13, *в*.

г) строим фронтальную проекцию точки, для этого откладываем координату "*z*" вниз со знаком "–", вверх со знаком "+" от координатной точки, рис. 13, *г*.

Конечный результат записывается так, как показано на рис. 13, *д*.

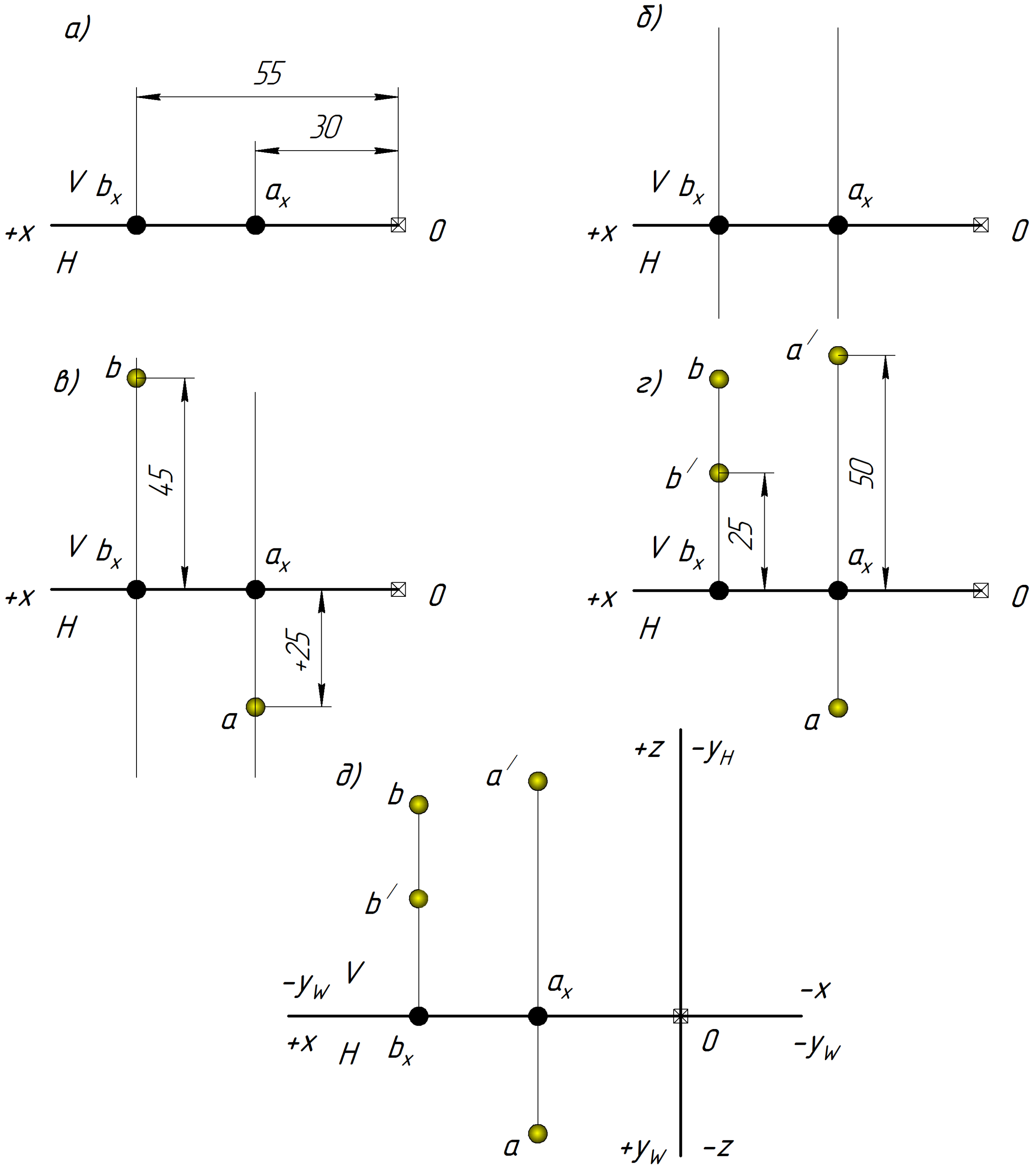


Рисунок 13 – Алгоритм построения эпюра точек

2.2 Проецирование точки в системе трех плоскостей проекций

Известно наглядное изображение точек в диметрической прямоугольной аксонометрии (рис. 14). Требуется построить плоскостное изображение эпюра точек.

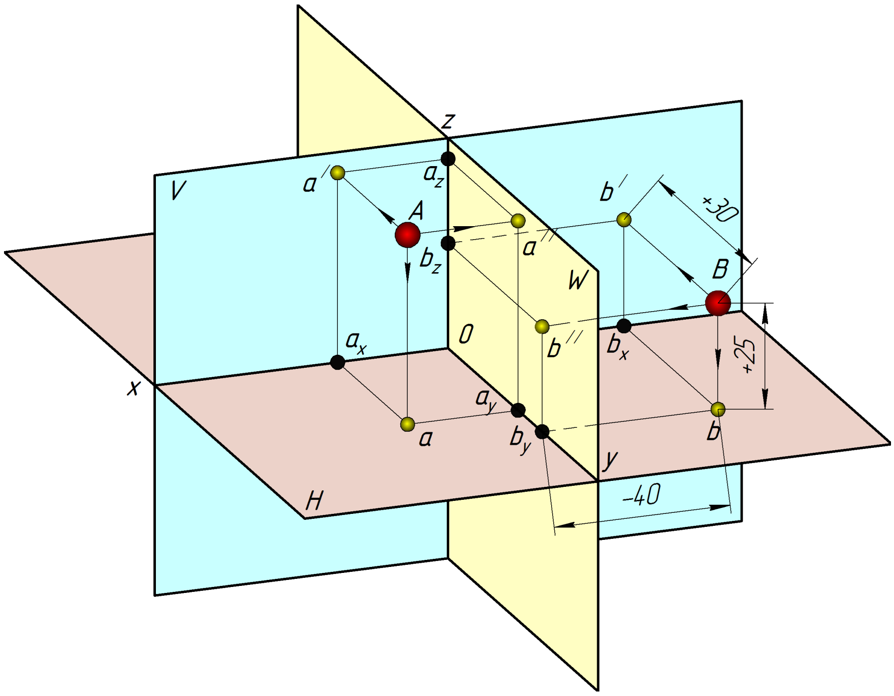


Рисунок 14 – Наглядное изображение точек

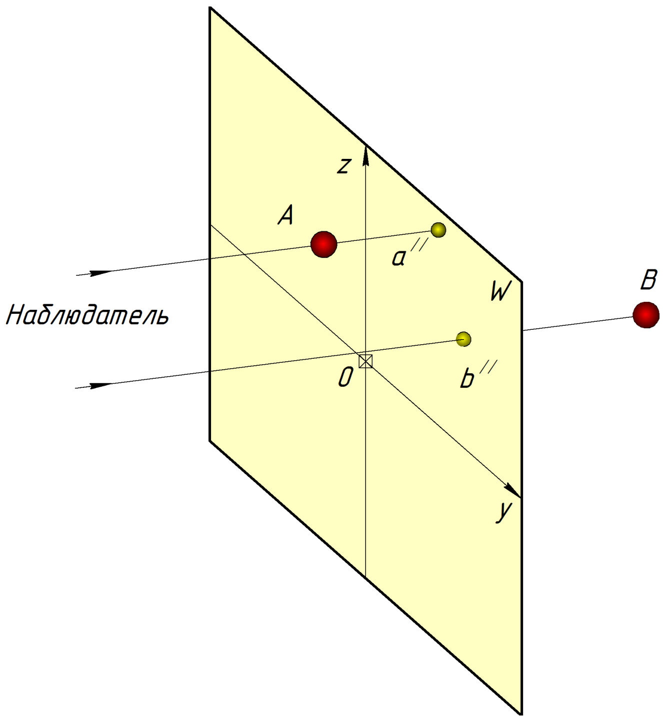


Рисунок 15 – Проецирование точек на профильную плоскость проекций

Наблюдатель смотрит на профильную плоскость проекций <u>всегда</u> слева (рис. 15).

Каждая проекция точки определяется двумя координатами:

a $(x,\ y_H)$ – горизонтальная проекция $(\cdot)A$;

a' $(x,\ z)$ – фронтальная проекция $(\cdot)A$;

a'' $(x,\ y_W)$ – профильная проекция $(\cdot)A$.

Величины, определяющие положение точки в пространстве, называется ее координатами $(x,\ y,\ z)$.

$$x = Aa'' = aa_y = a_x0 = a'a_z,$$

$$y = Aa' = aa_x = a_y0 = a''a_z,$$

$$z = Aa = a'a_x = a_z0 = a''a_y.$$

<u>ВТОРОЕ ПРАВИЛО</u>: фронтальная и профильная проекции точек всегда лежат на одном перпендикуляре к оси z.

Координаты $(\cdot)A$ остаются без изменения.

Координаты $(\cdot)\ B\ (\overbrace{-40}^{x},\ +\overbrace{30}^{y},\ \overbrace{+25}^{z}) \in$ V четверти пространства (см. рис. 7 – таблицу знаков).

Алгоритм построения:

а) строим горизонтальную и фронтальную проекции точек на эпюре, как это показано на рис. 13 (рис. 16, *а*);

б) согласно второму правилу восстановим перпендикуляр к оси z от фронтальной проекции точки, на пересечении перпендикуляра с осью z фиксируем координатную точку (a_z, b_z), рис. 16, *б*.

в) строим профильную проекцию точки, для этого откладываем координату "y" вправо со знаком "+", влево со знаком "–" от координатной точки (a_z, b_z), рис. 16, *в*.

Конечный результат записывается так, как показано на рис. 16, *г*.

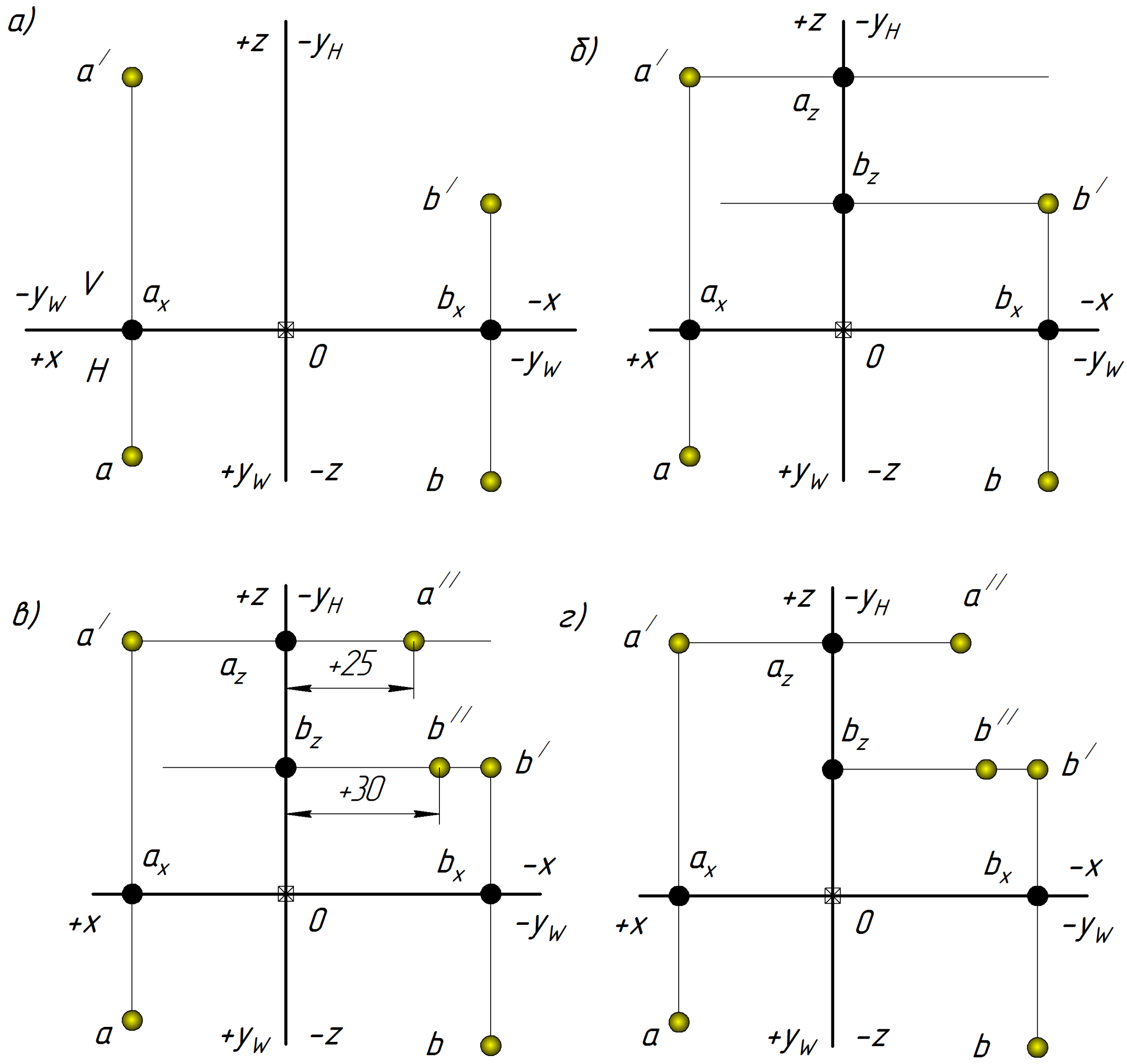


Рисунок 16 – Алгоритм построения эпюра точек в системе трех плоскостей

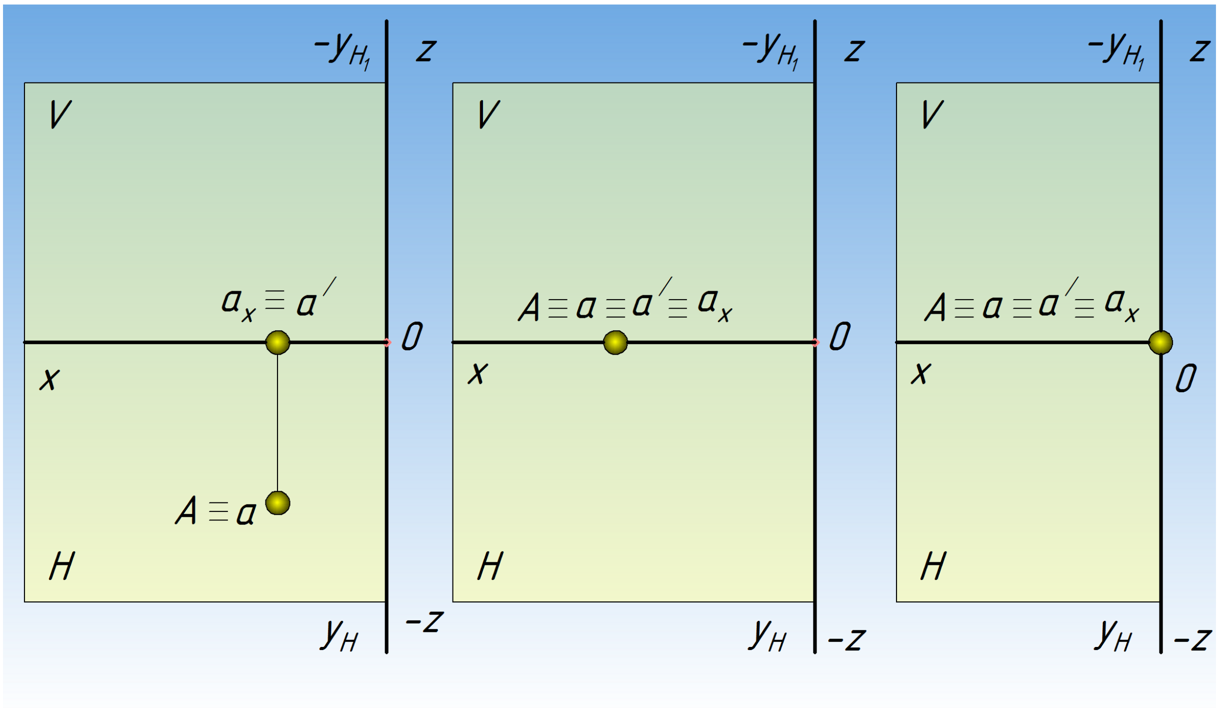
– Если три координаты точки не равны нулю – точка принадлежит пространству (рис. 16).

– Если одна координата точки равна нулю – точка принадлежит плоскости проекции (рис. 17, *а*).

– Если две координаты точки равны нулю – точка принадлежит координатой оси (рис. 17, *б*).

– Если три координаты точки равны нулю – точка принадлежит точке отсчета (рис. 17, *в*).

а) *б*) *в*)



(·) *A* (10, 20, 0) (·) *A* (30, 0, 0) (·) *A* (0, 0, 0)

a (10, 20); *a*' (10, 0) *a* (30, 0); *a*' (30, 0) *a* (0, 0); *a*' (0, 0)

Рисунок 17 – Эпюры четвертей пространства

Контрольные вопросы к теме 2

1. Как образовать чертеж точки в системе двух, трех плоскостей проекций. Правила знаков эпюра точки?
2. Что такое "линия связи"?
3. Как строится профильная проекция точки по ее двум проекциям?
4. Что определяет положение точки в пространстве?
5. Какое положение точки на плоскости определяет координата *x*?
6. Какое положение точки на плоскости определяет координата *y*?
7. Какое положение точки на плоскости определяет координата *z*?
8. В какой последовательности записываются координаты в обозначении положения точки в пространстве?
9. Какие знаки имеют координаты точки, расположенной в седьмом октанте?
10. В чем различие между "правой" и "левой" системами координат?
11. Чем различаются между собой чертежи точек, из которых одна расположена в первой четверти, а другая – в третьей?

Тема 3 Ортогональный чертеж прямой линии

Прямая – это множество точек, выложенных в ряд.

3.1 Прямая общего положения

Ограничив прямую линию двумя точками, получаем отрезок прямой. Продолжение ее от концов отрезка называют лучами.

Прямая общего положения – это прямая, наклоненная ко всем плоскостям проекций *H, V, W* (рис. 18).

Ограничим прямую линию отрезком *AB*.

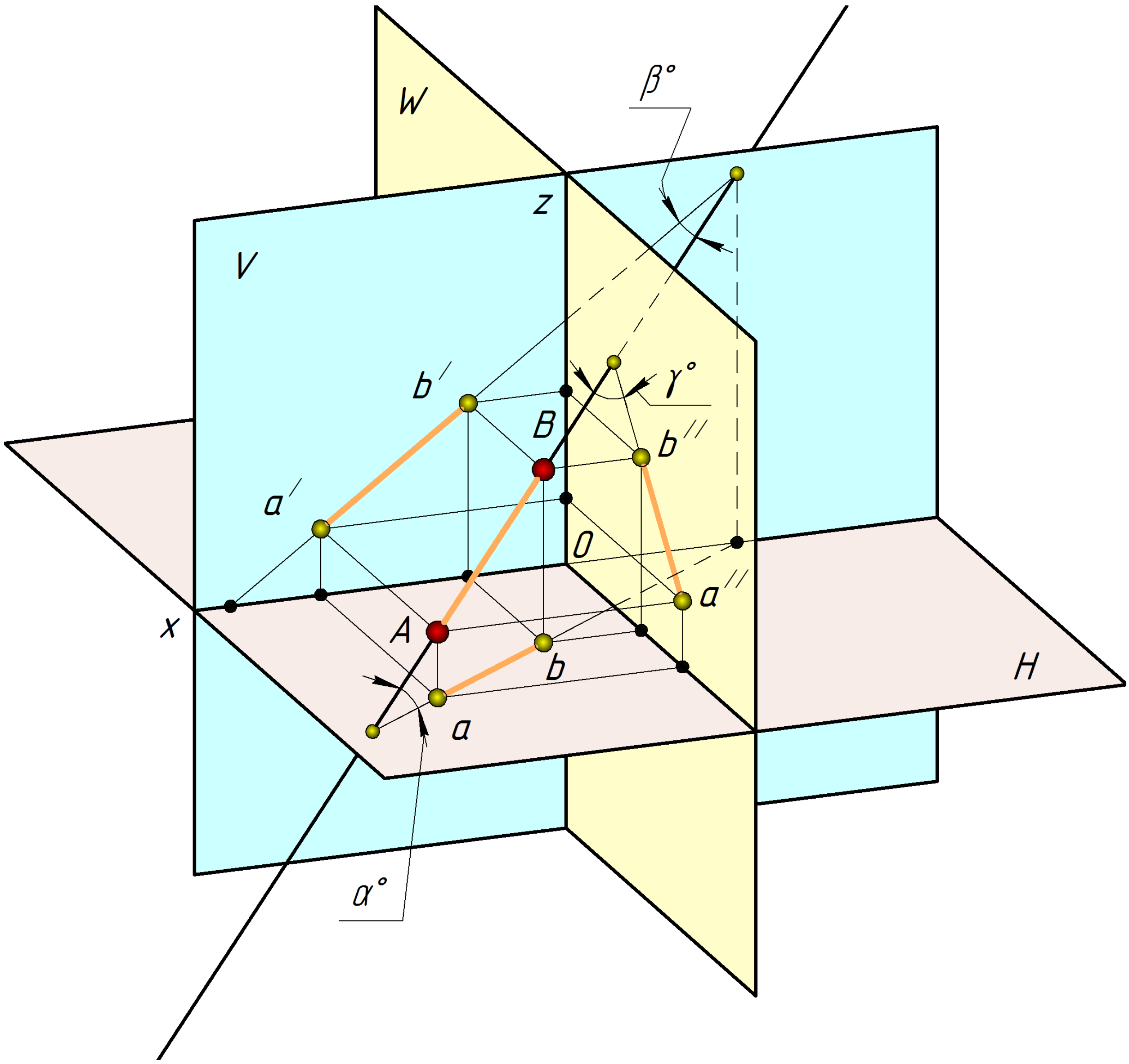


Рисунок 18 – Проецирующий аппарат, прямая общего положения

Построим проекции двух крайних точек отрезка прямой (·) *A* и (·) *B*, преобразовав проецирующий аппарат (октанту пространства) в эпюру.

Координаты точек *A* и *B* показаны на рис. 19. Необходимо иметь в виду, что у прямоугольной диметрической проекции (наглядное изображение) координаты осей *x* и z не искажены и идут в масштабе один к одному, а координаты оси y уменьшены в два раза. Поэтому координату "y" увеличиваем в два раза. $A(+40,\ +[2]\cdot 25,\ +10)$; $B(+17,\ +[2]\cdot 17,\ +28)$.

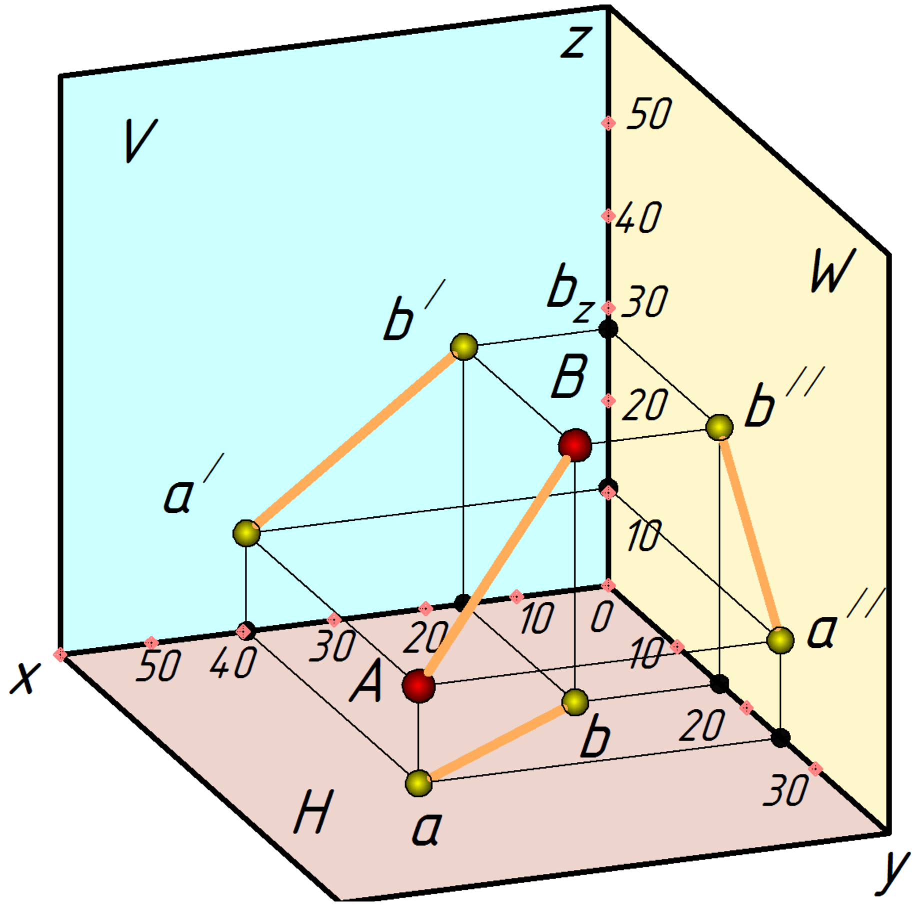


Рисунок 19 – Проецирующий аппарат, координаты точек отрезка

Алгоритм построения:

а) строим эпюр точек *A* и *B* в системе трех плоскостей проекций рис. 20, *а*.

б) соединяем одноименные проекции точек, получаем соответственно проекции прямой *AB*, рис. 20, *б*.

Во всех случаях все проекции отрезка искажены, т. е. меньше истинной величины отрезка.

$ab \neq a'b' \neq a''b'' \neq AB$.

Натуральную величину отрезка *AB* из прямоугольных треугольников можно рассчитать по формулам:

$AB = ab \cdot \cos\alpha°$

$AB = a^{/}b^{/} \cdot \cos\beta°$

$AB = a^{//}b^{//} \cdot \cos\gamma°$

Натуральную величину отрезка прямой общего положения (*Н.В.*) можно определить графически по проекциям.

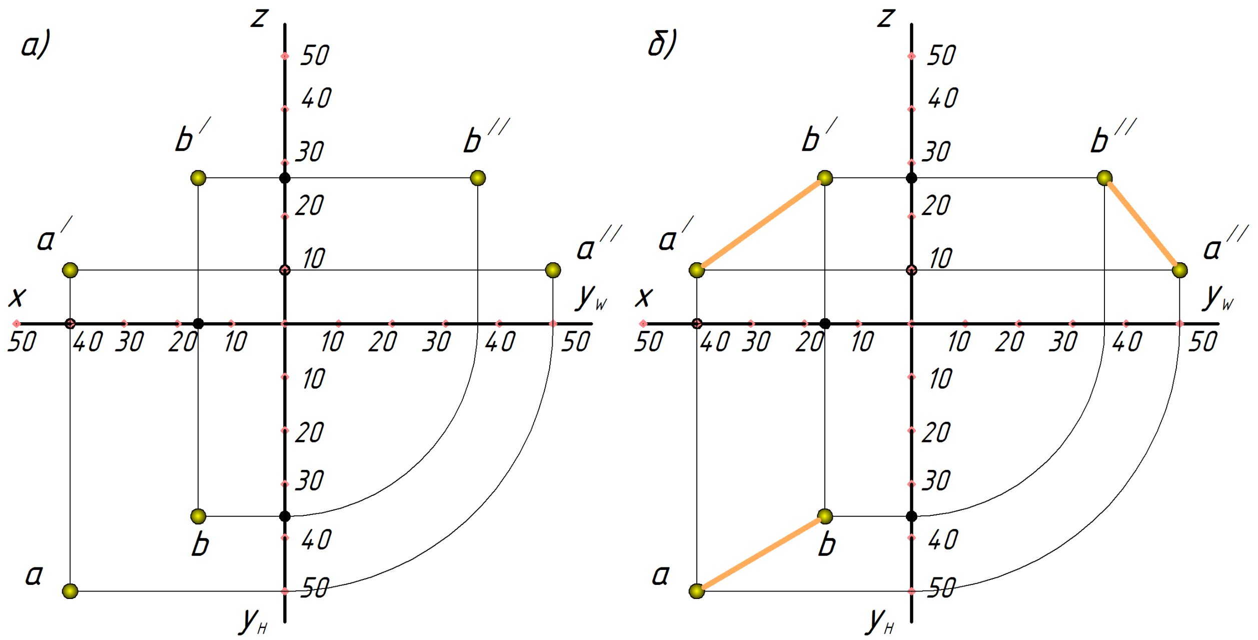


Рисунок 20 – Эпюра отрезка прямой *AB*

Рассмотрим способ определения на чертеже (эпюре) натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов наклона к плоскостям проекций. Для примера рассмотрим отрезок и одну плоскость проекций (рис. 21).

Дан отрезок прямой *AB* общего положения и его проекция *ab*. Заключаем *AB* в плоскость *Q*. Плоскость $Q \perp P$, через (·) *A* в плоскости *Q* проводим *AC* || *ab*, таким образом, получаем прямоугольный треугольник Δ *ABC*. Следовательно, *Aa* = *Cb*.

$$Aa = z_a;\ Bb = z_b;\ |\Delta z| = z_b - z_a.$$

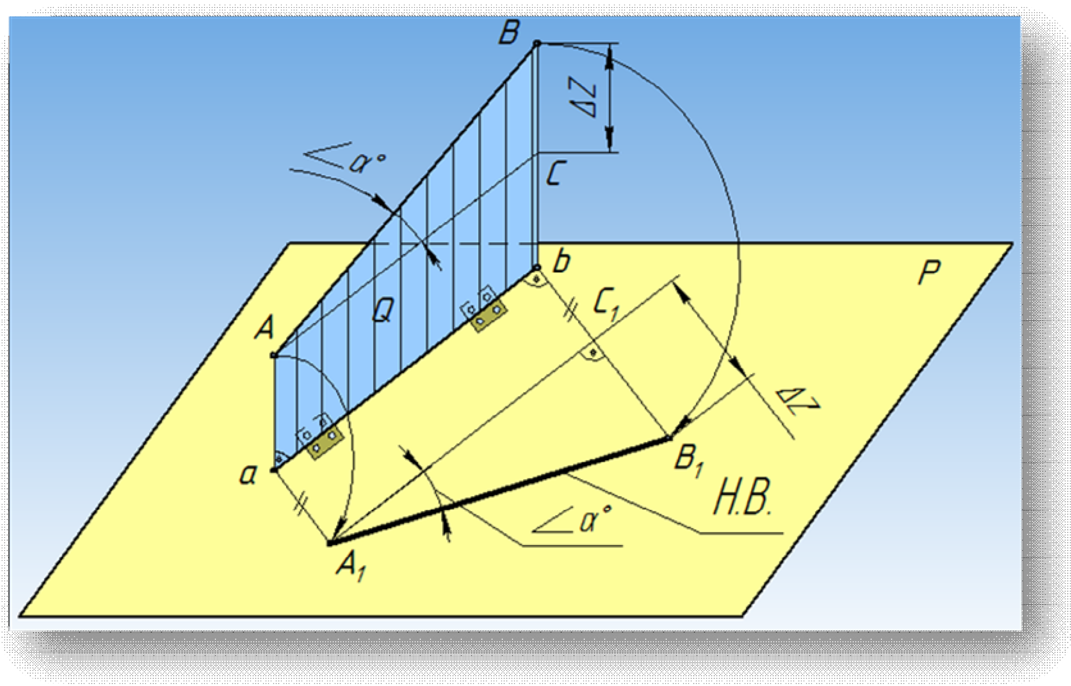


Рисунок 21 – Способ определения натуральной величины отрезка прямой методом прямоугольного треугольника

Повернем плоскость Q вокруг горизонтальной проекции ab до совмещения с плоскостью P. Расмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$, где $A_1C_1 = ab$, а катет $B_1C_1 = \Delta z$. Угол между гипотенузой A_1B_1 и проекцией отрезка ab – является натуральной величиной угла наклона AB к плоскости проекций P.

Для определения натуральной величины отрезка общего положения необходимо построить прямоугольный треугольник, одним катетом которого является горизонтальная (фронтальная) проекция отрезка, а вторым – катетом отрезка, который равнен по величине алгебраической разности координат "z" ("y") крайних точек отрезка. Гипотенуза построенного треугольника определяет натуральную величину отрезка AB.

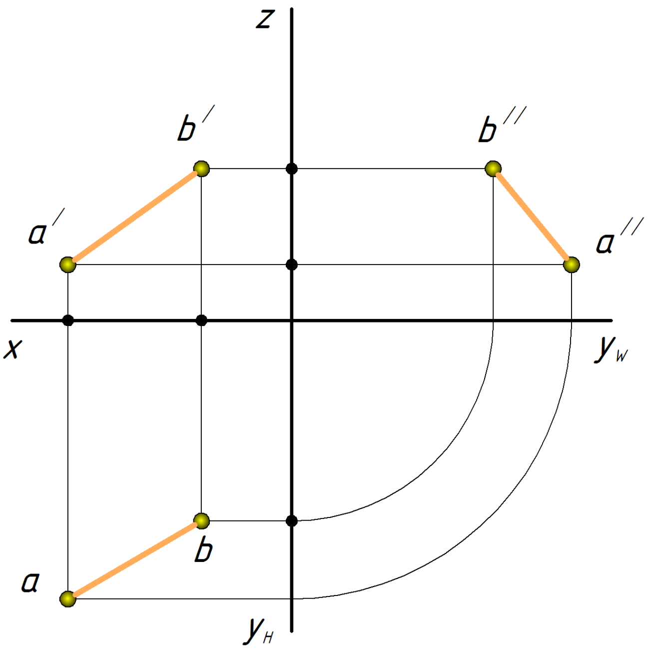


Рисунок 22 – Эпюра отрезка

Пример: определить натуральную величину отрезка AB (рис. 22) и углы наклона его к плоскостям проекций.

I. Горизонтальная проекция отрезка

а) Рассмотрим горизонтальную проекцию (ab) отрезка AB. Определим угол $\angle\alpha°$ и натуральную величину AB. Для этого восстановим перпендикуляр от горизонтальной проекции ab. Перпендикуляр можно провести из любой точки горизонтальной проекции (ab) отрезка прямой AB. На рис. 23, *а* перпендикуляр проведен от горизонтальной проекции точки A.

Угол $\alpha°$ – угол наклона отрезка прямой AB к горизонтальной плоскости проекций H.

б) На проведенном заранее перпендикуляре откладываем расстояние, равное разнице превышения координат Δz, рис. 23, *б*. $a_z \neq b_z$; $|\Delta z| = a_z - b_z$.

Фиксируем точу A_1, т. к. перпендикуляр проведен от точки a. Точка B_1 совпадает с горизонтальной проекцией b. Соединив точки A_1, B_1, получаем натуральную величину отрезка AB. Угол между построенной гипотенузой и горизонтальной проекцией отрезка (α^0) является углом наклона отрезка AB к плоскости H.

II. Фронтальная проекция отрезка

а) Рассмотрим фронтальную проекцию ($a'b'$) отрезка AB. Определим угол $\angle\beta°$ и натуральную величину AB. Для этого восстановим перпендикуляр от фронтальной проекции $a'b'$. Перпендикуляр можно провести из любой точки конца фронтальной проекции ($a'b'$) отрезка прямой AB. На рис. 24, *а* перпендикуляр проведен от фронтальной проекции b'.

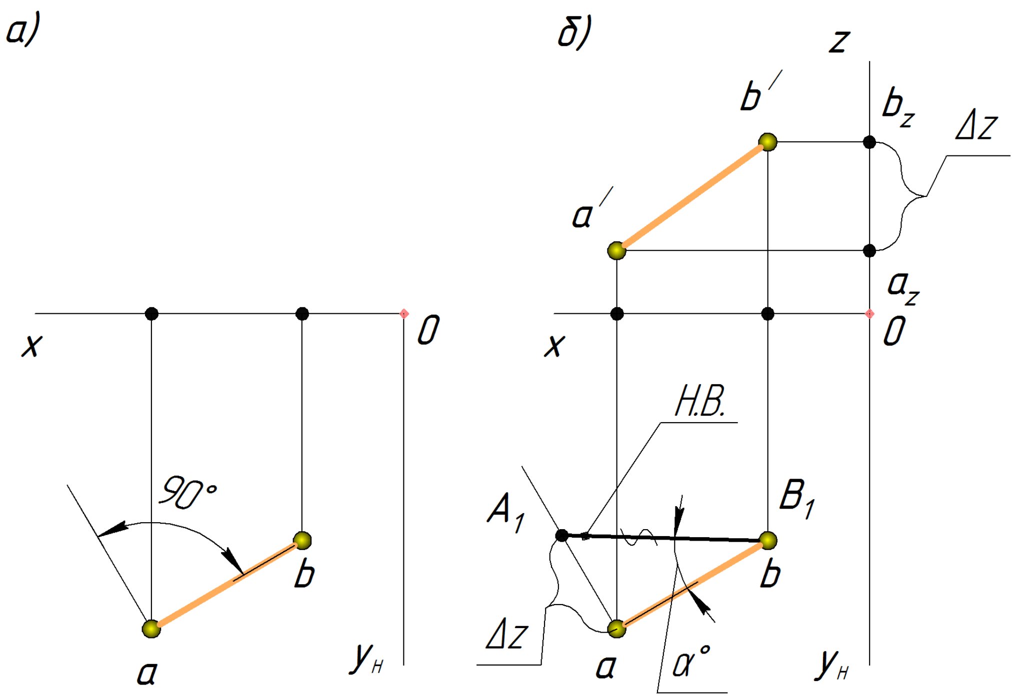


Рисунок 23 – Метод прямоугольного треугольника (горизонтальная проекция)

Угол ∠β° – угол наклона отрезка прямой *AB* к фронтальной плоскости проекций *V*.

б) На проведенном заранее перпендикуляре откладываем расстояние разницы превышения координат Δy, рис. 24, *б*. $a_y \neq b_y$; $|\Delta y| = a_y - b_y$. Фиксируем точку B_2, т. к. перпендикуляр проведен от точки b'. Точка A_2 совпадает с точкой a'. Соединив точки A_1 и B_1, получаем натуральную величину отрезка *AB*. Угол между построенной гипотенузой и фронтальной проекцией является углом наклона отрезка к плоскости *V*, угол ∠β°. $AB = A_2B_2$.

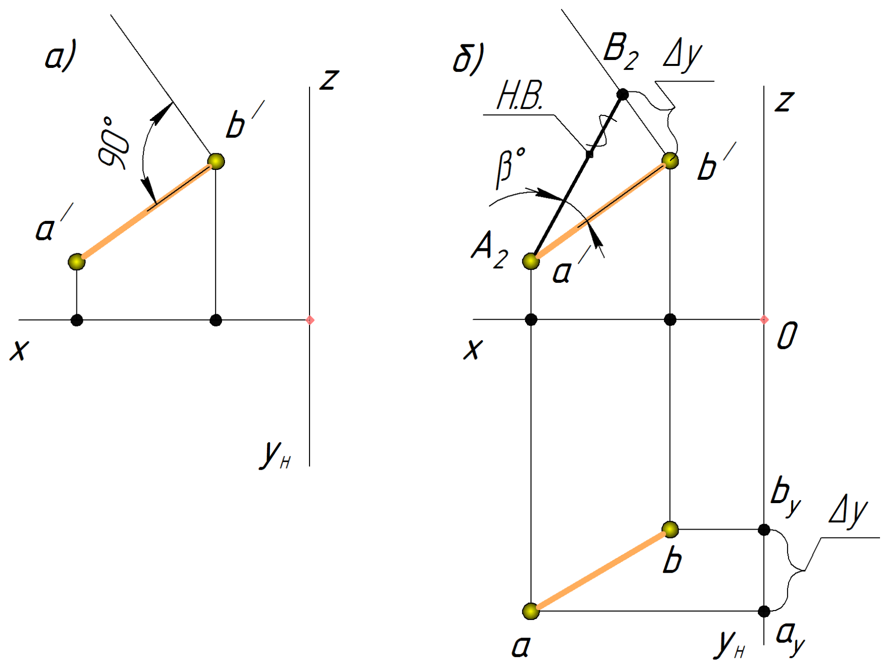


Рисунок 24 – Метод прямоугольного треугольника (фронтальная проекция)

III. Профильная проекция отрезка

а) Рассмотрим профильную проекцию ($a''b''$) отрезка AB. Определим угол $\angle\gamma°$ и натуральную величину AB. Для этого восстановим перпендикуляр от профильной проекции $a''b''$. Перпендикуляр можно провести из любой точки конца профильной проекции ($a''b''$) отрезка прямой AB. На рис. 25, *а* перпендикуляр проведен от точки b''.

Угол $\angle\gamma°$ – угол наклона отрезка прямой AB к профильной плоскости проекций W.

б) На проведенном заранее перпендикуляре откладываем расстояние разницы превышения координат Δx (рис. 25, *б*). $a_x \neq b_x$; $|\Delta x| = a_x - b_x$. Фиксируем точку B_3, т. к. перпендикуляр проведен от точки b". Точка A_3 совпадает с точкой a''. Соединив точки A_3 и B_3, получаем натуральную величину отрезка AB. Угол между построенной гипотенузой и профильной проекцией является углом наклона отрезка к плоскости W, угол $\angle\gamma°$.$AB = A_3B_3$.

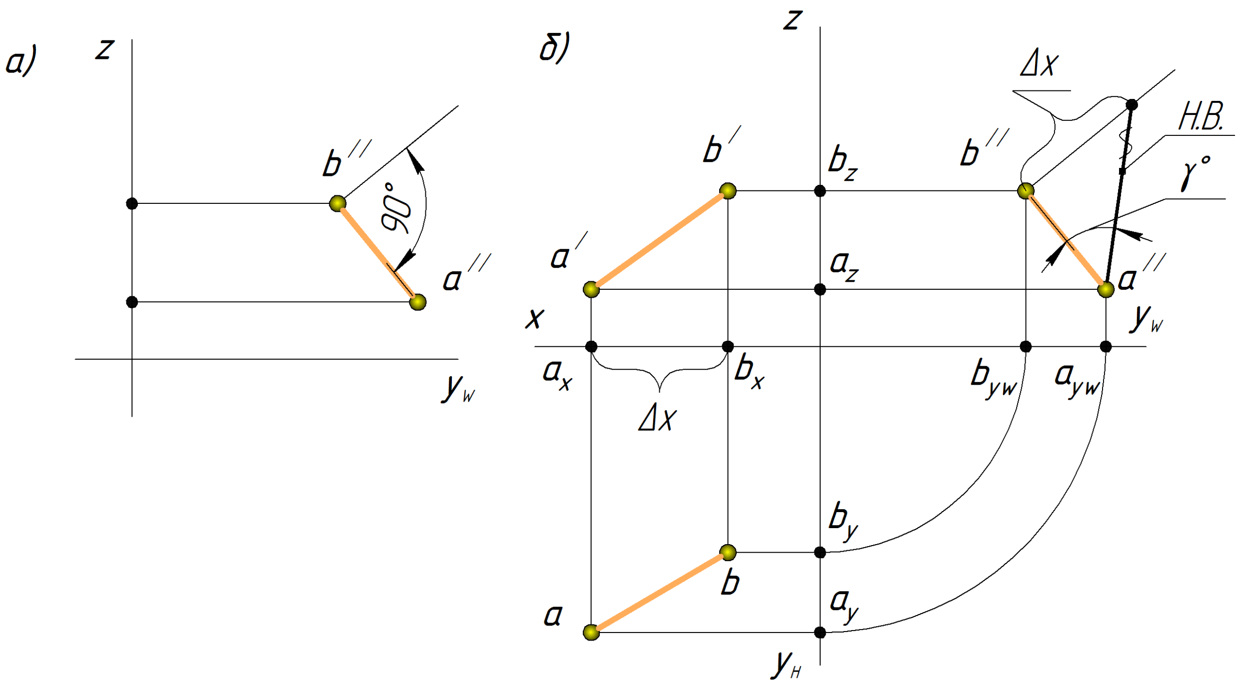


Рисунок 25 – Метод прямоугольного треугольника (профильная проекция)

3.2 Прямые частного положения

– <u>Прямые уровня</u>.
– <u>Проецирующие прямые</u>.

I. Прямые уровня

Прямые уровня – это прямые, параллельные плоскости проекций:

– горизонтальная прямая уровня – горизонталь;
– фронтальная прямая уровня – фронталь;
– профильная прямая уровня – профиль.

1. Горизонтальная прямая уровня

Пусть $y_a \neq y_b$; $z_a = z_b$ (рис. 26).

Все точки прямой AB одинаково удалены от плоскости H.

Такая прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций *H* и называется горизонтальной прямой или горизонталью.

$$a'b' \parallel 0x;\ AB \parallel H,\ ab \nparallel 0x;\ \ ab = AB = \text{Н.В.}$$

$\angle\beta^0$ – действительный угол наклона отрезка *AB* к фронтальной плоскости проекций *V*.

Свойства проекций прямой линии:

– Фронтальная проекция прямой <u>всегда</u> параллельна оси *x*.

– Горизонтальная проекция прямой и угол $\angle\beta^0$ <u>всегда</u> проецируются на *H* без искажения $\angle\beta° \neq 0°$; $\angle\beta° \neq 90°$.

– Профильная проекция прямой <u>всегда</u> параллельна оси *y*.

–Фронтальная прямая уровня.

Пусть $y_a = y_b$; $z_a \neq z_b$ (рис. 27).

Все точки прямой *AB* одинаково удалены от плоскости *V*.

Такая прямая параллельна фронтальной плоскости проекций *V* и называется фронтальной прямой, или фронталью.

$$ab \parallel x; \qquad AB \parallel V; \qquad a'b' \nparallel x; \qquad a'b' = AB = \text{Н.В.}$$

$\angle\alpha^0$ – действительный угол наклона отрезка *AB* к горизонтальной плоскости проекций *H*.

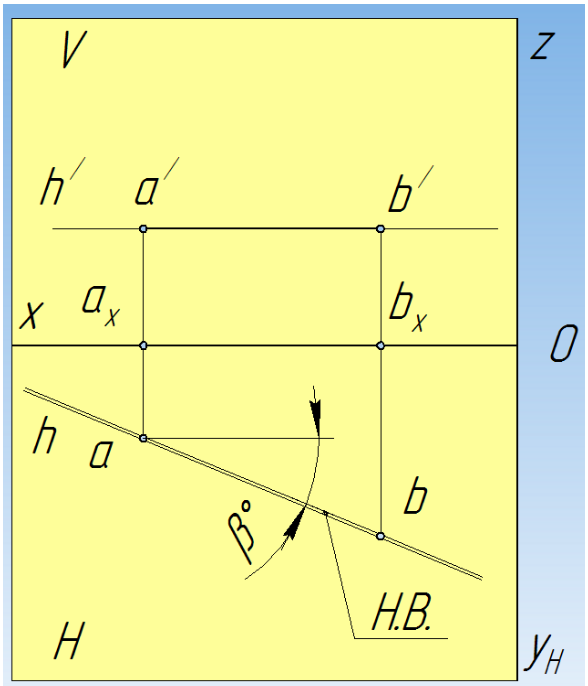


Рисунок 26 – Горизонтальная прямая уровня

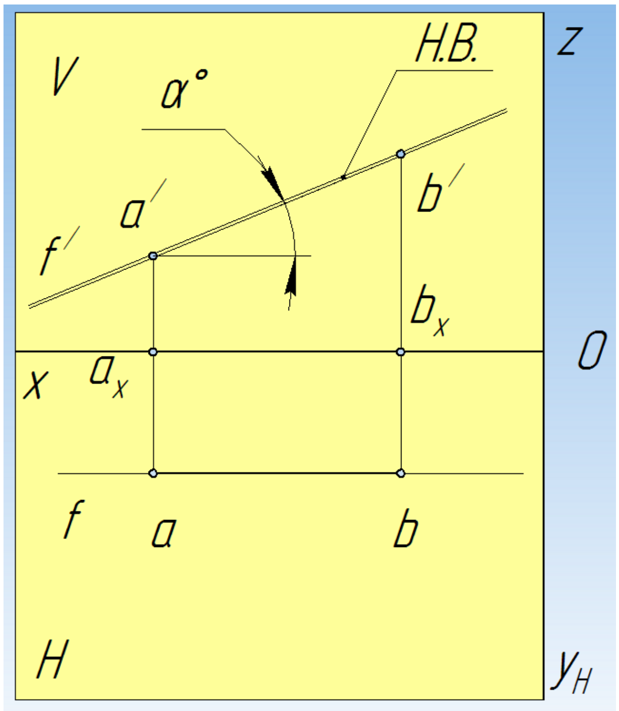


Рисунок 27 – Фронтальная прямая уровня

Свойства проекций:

– Горизонтальная проекция прямой <u>всегда</u> параллельна оси *x*.

– Фронтальная проекция прямой и угол $\angle\alpha°$ <u>всегда</u> проецируются на фронтальную плоскость проекций без искажения $\angle\alpha° \neq 0°$; $\angle\alpha° \neq 90°$.

– Профильная проекция прямой <u>всегда</u> перпендикулярна оси *y*.

2. Профильная прямая уровня

Пусть $x_a = x_b$; $z_a \neq z_b$ (рис. 28).

Все точки прямой AB одинаково удалены от плоскости W.

Такая прямая параллельна профильной плоскости проекций W и называется профильной прямой.

$$ab \parallel y; \qquad a^{/}b^{/} \parallel z; \qquad AB \parallel W;$$
$$a^{//}b^{//} \nparallel z; \qquad a^{//}b^{//} = AB = \text{Н.В.}$$

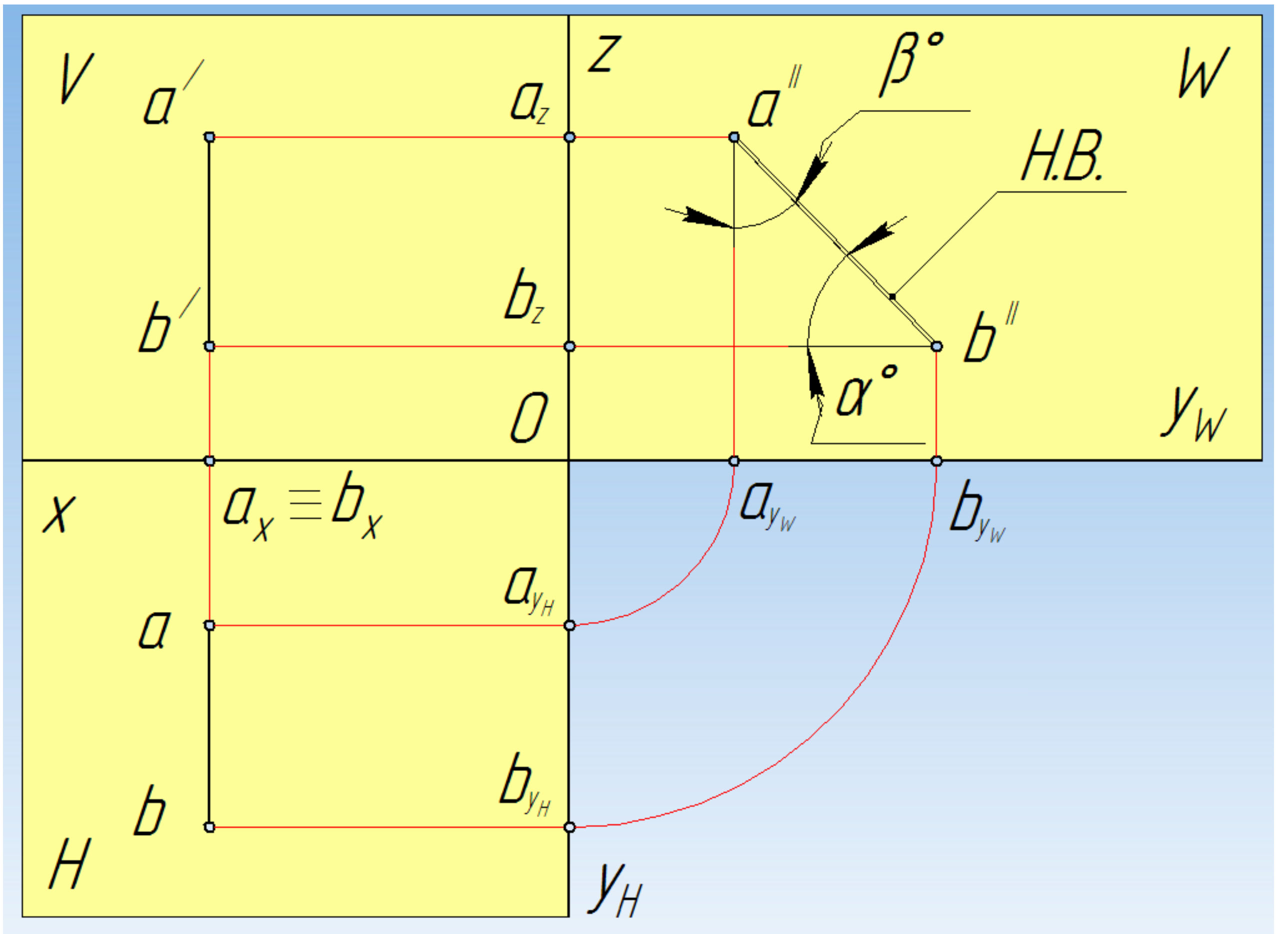


Рисунок 28 – Профильная прямая уровня

Свойства проекций:

– Горизонтальная и фронтальная проекция прямой <u>всегда</u> перпендикулярны оси x.

– Профильная проекция прямой и углы $\angle\alpha°$ и $\angle\beta°$ <u>всегда</u> проецируются на профильную плоскость проекций без искажения $\angle\alpha° \neq 0°$; $\angle\alpha° \neq 90°$.

II. Проецирующие прямые

Проецирующие прямые – это прямые, перпендикулярные плоскостям проекций (H, V, W):

– горизонтально-проецирующая прямая;
– фронтально-проецирующая прямая;
– профильно-проецирующая прямая.

1. Горизонтально-проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная к горизонтальной плоскости проекций H (рис. 29).

Пусть: $x_a = x_b$; $y_a = y_b$; $AB \perp H$.

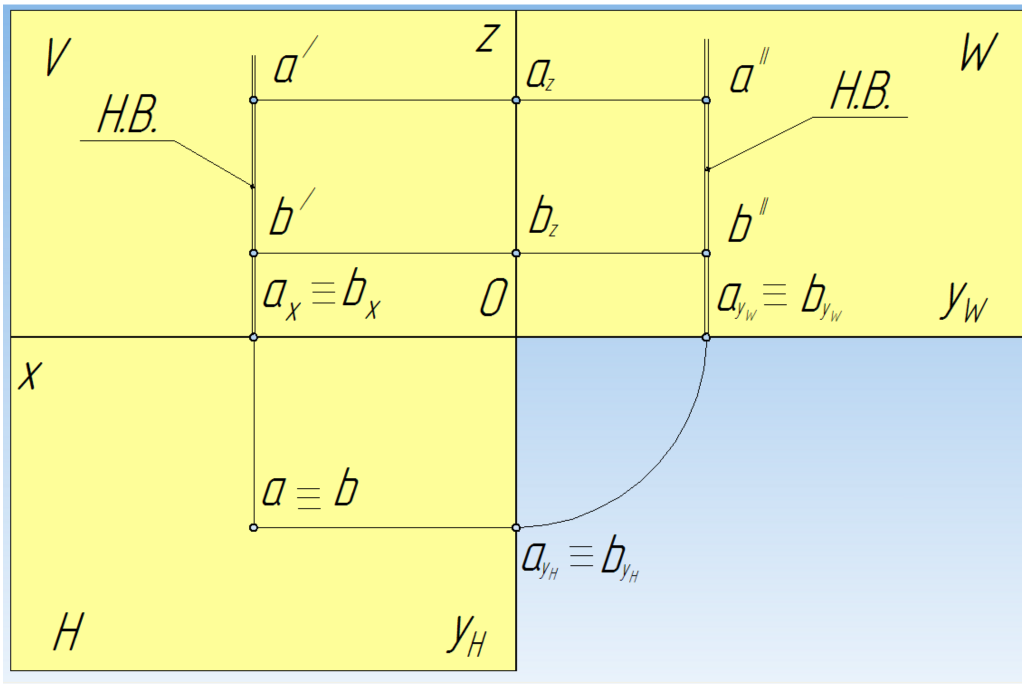


Рисунок 29 – Горизонтально-проецирующая прямая

Свойства проекций:

$$a^{/}b^{/} \perp x; \quad a^{//}b^{//} \perp x; \; a^{/}b^{/} \parallel V;$$

$$a^{//}b^{//} \parallel W; \; a^{/}b^{/} = AB = \text{Н.В.}; \; a^{//}b^{//} = AB = \text{Н.В.}$$

2. Фронтально-проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная к фронтальной плоскости проекций V (рис. 30).

Пусть: $x_a = x_b$; $z_a = z_b$; $AB \perp V$.

Свойства проекций:

$$ab \perp x; \quad a^{//}b^{//} \perp z; \; ab \parallel H$$

$$a^{//}b^{//} \parallel W; \; ab = AB = H.B.; \quad a^{//}b^{//} = AB = H.B.$$

3. Профильно-проецирующая прямая

Профильно-проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная к профильной плоскости проекций W (рис. 31).

Пусть: $y_a = y_b$; $z_a = z_b$; $AB \perp W$.

Свойства проекций:

$$ab \parallel x; \; a^{/}b^{/} \parallel x; \; ab \parallel H;$$

$$a^{//}b^{//} \perp W; \; ab = AB = \text{Н.В.}; \; a^{/}b^{/} = AB = \text{Н.В.}$$

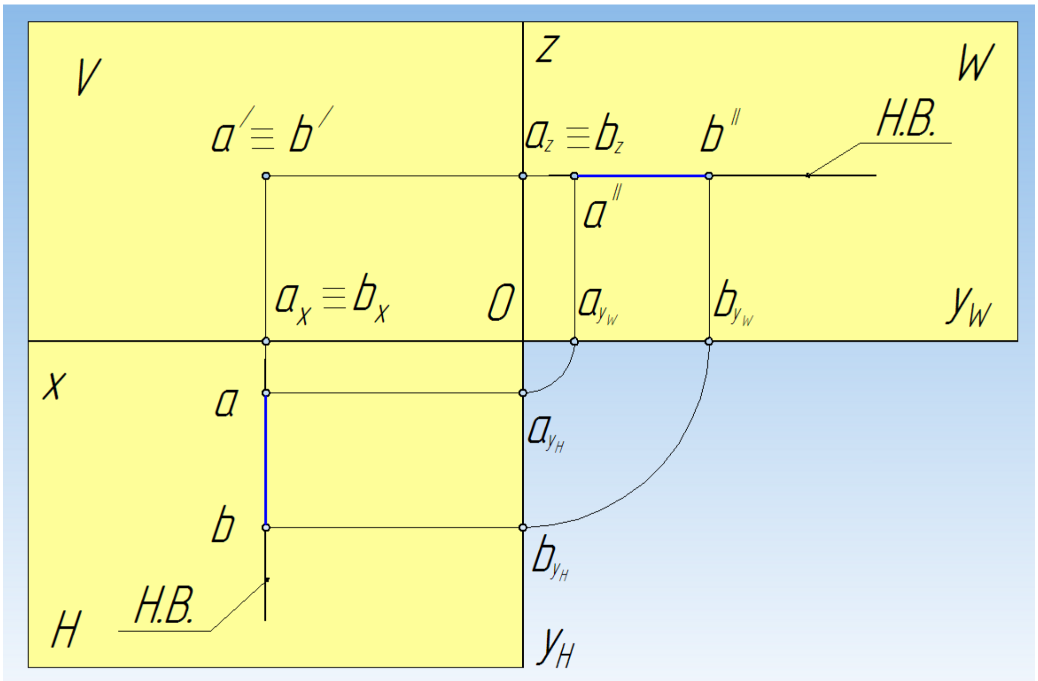


Рисунок 30 – Фронтально-проецирующая прямая

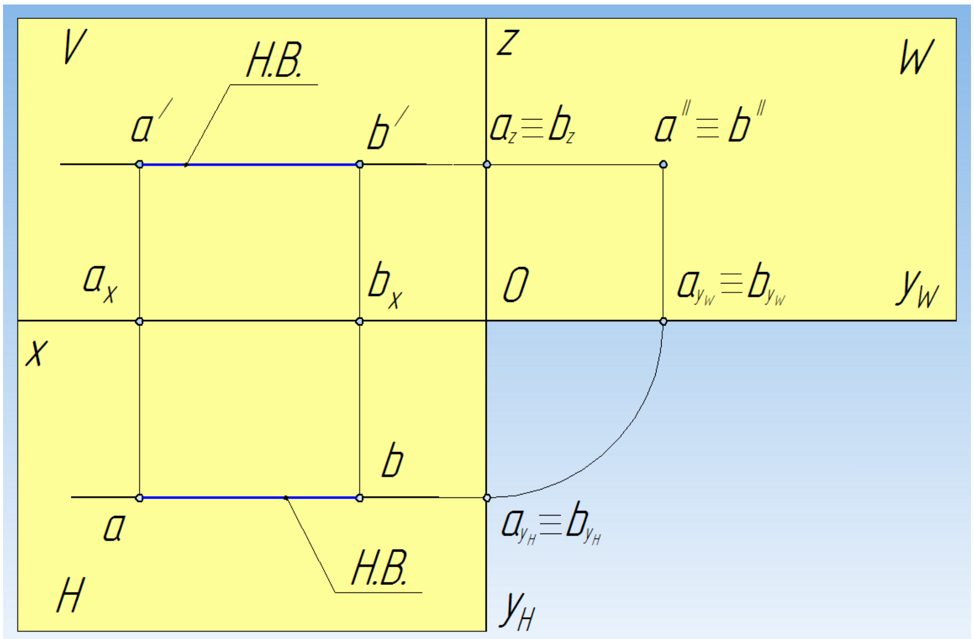
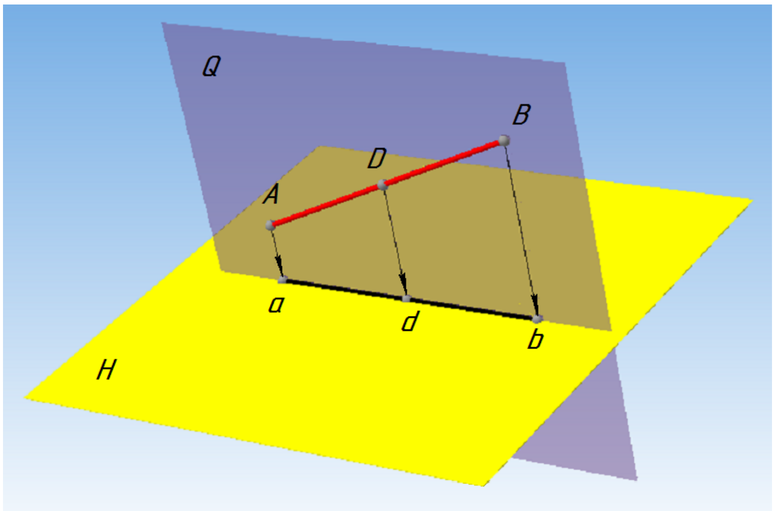


Рисунок 31. Профильно-проецирующая прямая

3.3 Взаимное положение прямой и точки

Прямая теорема: если в пространстве точка принадлежит прямой, то на чертеже (эпюре) проекции этой точки лежат на одноименных проекциях этой прямой.

Возьмем отрезок *AB* – общего положения, некоторую плоскость *Q* и плоскость проекций *H* (рис. 32).



$Q \perp H$

$AB \in Q$

$ab \in Q$

$ab \in H$

$Dd \perp H$

$(\cdot)\ D \in AB$

$(\cdot)\ D \in Q$

$(\cdot)\ Dd \in Q$

$(\cdot)\ d \in ab$

Рисунок 32 – Взаимное положение прямой и точки

Проверить, принадлежат ли точки *A*, *B*, *C* и *D* заданной прямой *M* (рис. 33).

$(\cdot)\ A \notin M$, т. к. не совпадают одноименные проекции точки *A* с прямой *M*.

$(\cdot)\ B \notin M$, т. к. фронтальная проекция (b') точки *B* не лежит на фронтальной проекции (m') прямой *M*.

$(\cdot)\ C \in M$ – одноименные проекции точки *C* лежат на прямой *M*.

$(\cdot)\ D \notin M$, т. к. горизонтальная проекция (d) точки *D* не лежит на горизонтальной проекции (m) прямой *M*.

Обратная теорема: если на чертеже (эпюре) проекции точки лежат на одноименных проекциях прямой, то данная точка принадлежит этой прямой[1].

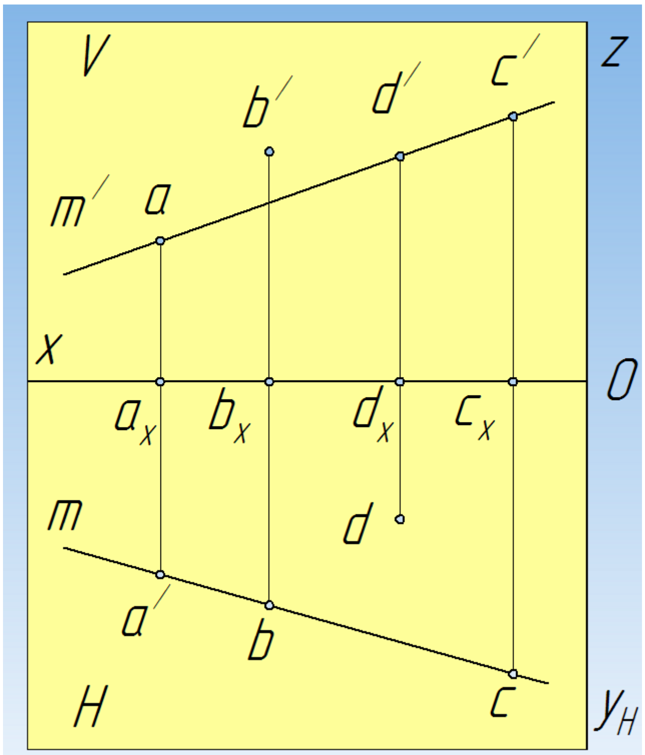


Рисунок 33 – Эпюра прямой *M*

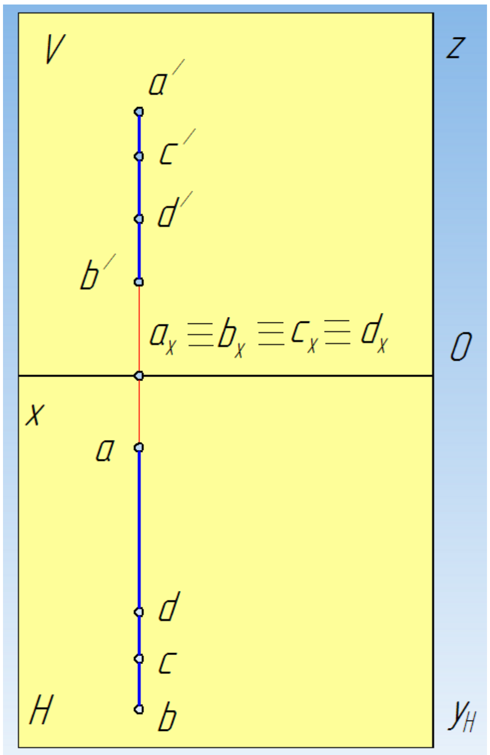


Рисунок 34 – Эпюр отрезка *AB*

[1] Если профильная прямая, обратная теорема справедлива только в системе трёх плоскостей проекций (*H*, *V*, *W*) (рис. 35).

Пример: определить, принадлежат ли точки *C* и *D* заданному отрезку *AB* (рис. 34).

Если прямая в пространстве проходит через точку, то на чертеже проекции этой прямой проходят через одноименные проекции этой точки.

Решение (рис. 35):

$(\cdot)\, c \in ab; \qquad (\cdot)\, c' \in a'b'; \qquad (\cdot)\, c'' \notin a''b''.$

Следовательно, $(\cdot)\, C \notin AB$.

$(\cdot)\, d \in ab; \qquad (\cdot)\, d' \in a'b'; \qquad (\cdot)\, d'' \in a''b''.$

Следовательно, $(\cdot)\, D \in AB$.

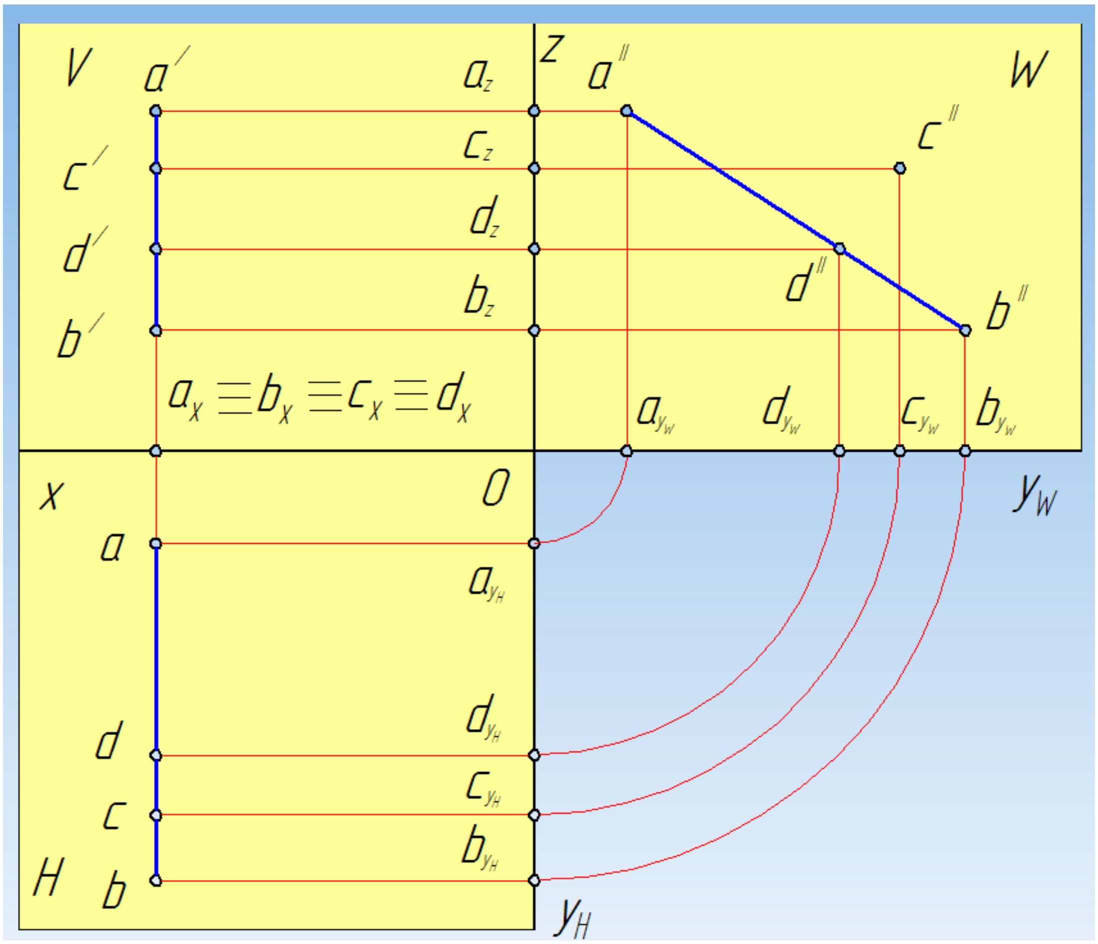


Рисунок 35 – Эпюр отрезка *AB*

3.4 Следы прямой линии

Следы прямой – это точки пересечения прямой с плоскостями проекций (*H*, *V*, *W*) (рис. 36).

- горизонтальный след прямой;
- фронтальный след прямой;
- профильный след прямой.

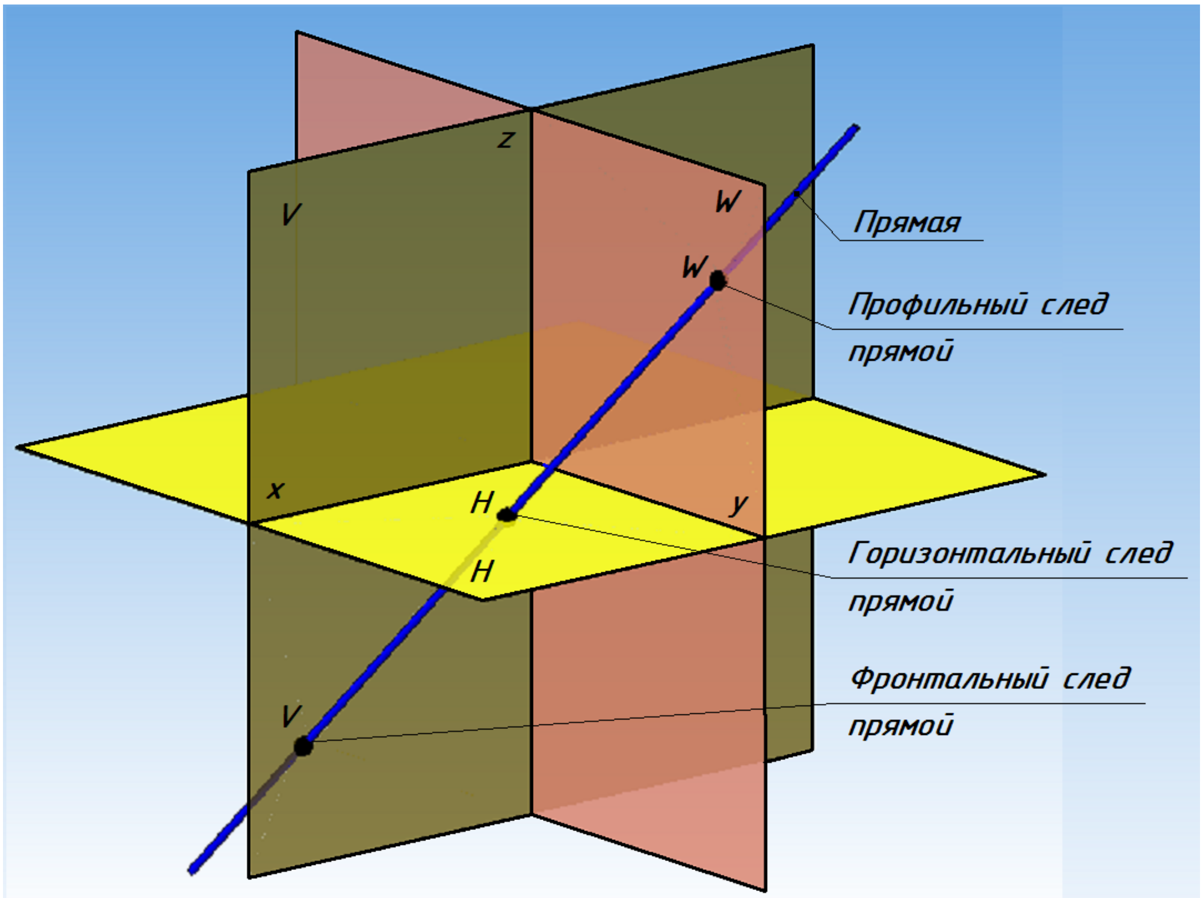


Рисунок 36 – Проецирующий аппарат, следы прямой

Пример: известен отрезок прямой *AB*, рис. 37. Найти следы отрезка прямой.

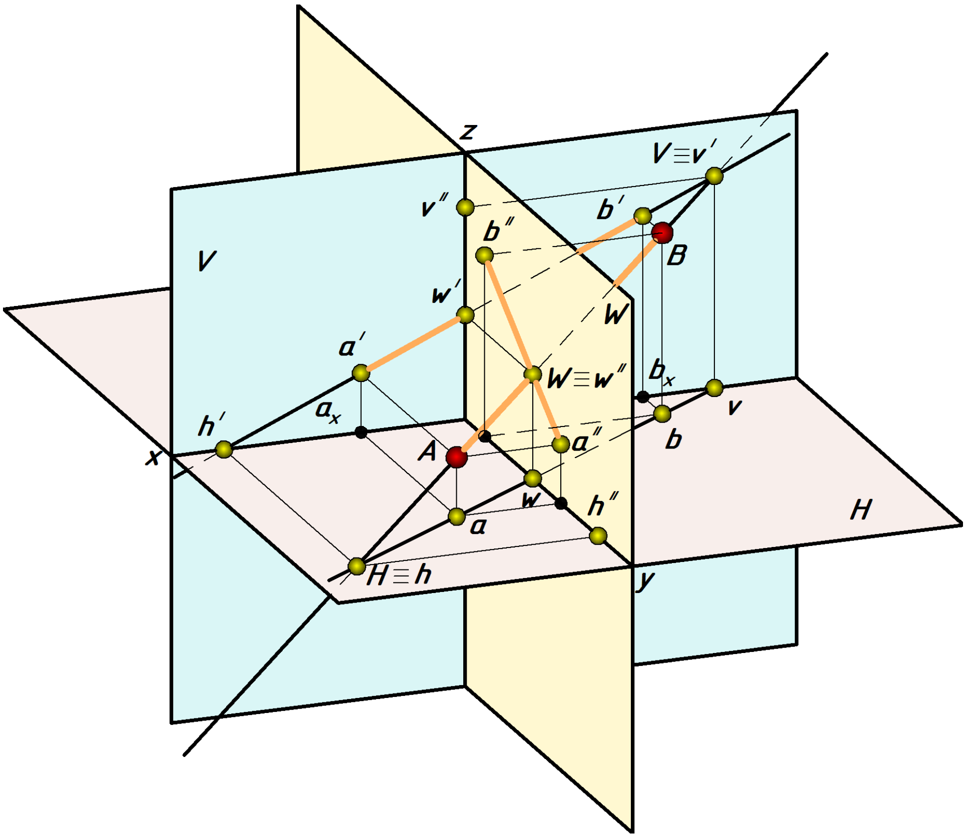


Рисунок 37 – Проецирующий аппарат, отрезок прямой *AB*

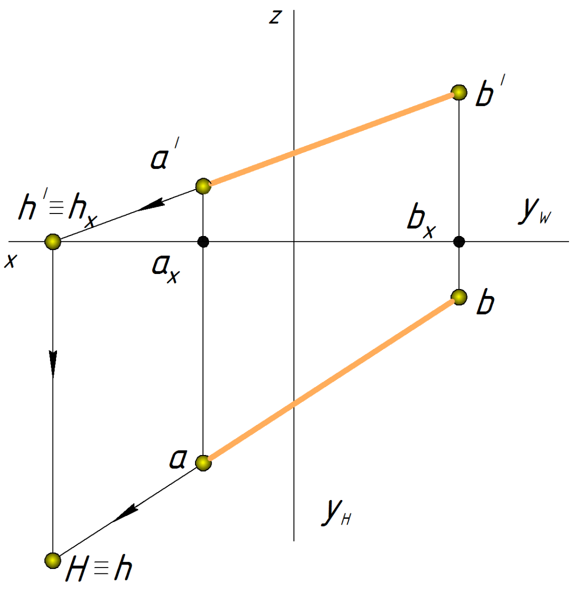


Рисунок 38 – Эпюр, горизонтальный след прямой

Решение: 1 – горизонтальный след прямой.

Горизонтальный след прямой – это точка пересечения прямой (общего или частного положения) с горизонтальной плоскостью проекций *H*. Горизонтальный след принято обозначают прописной буквой – *H*. $AB \cap H$.

Для нахождения горизонтального следа прямой отрезка *AB* на эпюре, поступаем следующим образом.

– Находим точку пересечения фронтальной проекции ($a^{/}b^{/}$) отрезка прямой с осью *x* или его продолжения $(\cdot)\ h^{/}$ (рис. 38).

– Восстанавливаем перпендикуляр к оси *x* из $(\cdot)\ h^{/}$ до пересечения с горизонтальной проекцией отрезка прямой или его продолжением с $(\cdot)\ H$.

H – горизонтальный след прямой; h – горизонтальная проекция горизонтального следа; $h^{/}$ – фронтальная проекция горизонтального следа; $h^{//}$ – профильная проекция горизонтального следа.

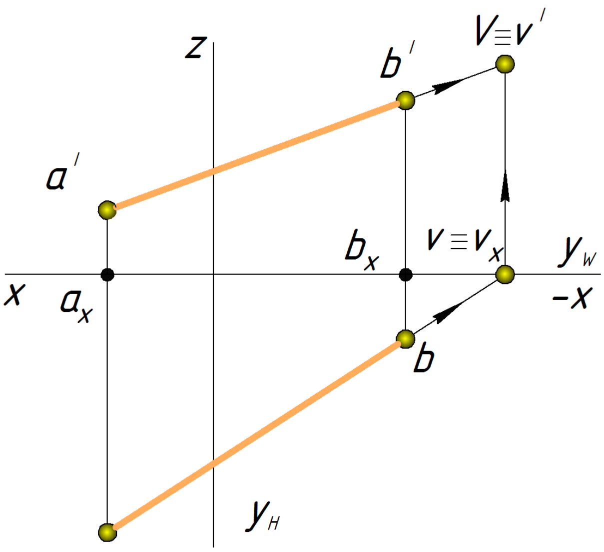


Рисунок 39 – Эпюр, фронтальный след прямой

2 – Фронтальный след прямой.

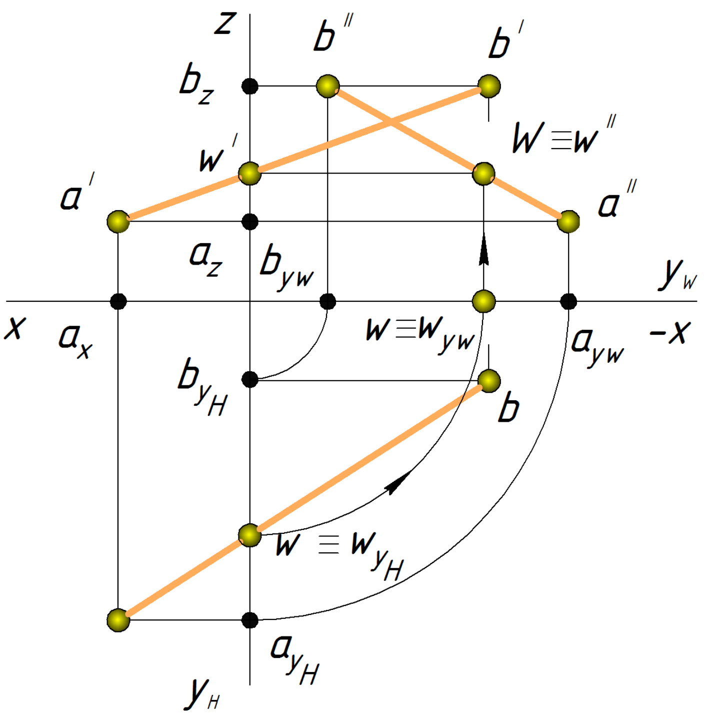
Фронтальный след прямой – это точка пересечения прямой (общего или частного положения) с фронтальной плоскостью проекций *V*. Фронтальный след принято обозначать прописной буквой – *V*. $AB \cap V$.

Для нахождения фронтального следа прямой отрезка *AB* поступаем следующим образом:

– Находим точку пересечения горизонтальной проекции (*ab*) отрезка прямой с осью *x* или его продолжением с $(\cdot)v$ (рис. 39).

– Восстанавливаем перпендикуляр к оси *x* из $(\cdot)v$ до пересечения с фронтальной проекцией отрезка прямой или его продолжения $(\cdot)V$.

V – фронтальный след прямой; *v* – горизонтальная проекция фронтального следа; *v’* – фронтальная проекция фронтального следа; *v’’* – профильная проекция фронтального следа.



3 – Профильный след прямой

Профильный след прямой – это точка пересечения прямой (общего или частного положения) с профильной плоскостью проекций *W*. Профильный след принято обозначать прописной буквой – *W*. $AB \cap W$.

Для нахождения профильного следа прямой отрезка *AB* поступаем следующим образом.

– Находим точку пересечения горизонтальной проекции (*ab*) отрезка прямой с осью y_H или его продолжения с (·)*w* (рис. 40).

Рисунок 40 – Эпюр, профильный след прямой

– Получившуюся точку (·)*w* переносим на ось y_w, восстанавливаем перпендикуляр к оси y_w из (·)*w* до пересечения с профильной проекцией отрезка прямой или его продолжением с (·)*W*.

W – профильный след прямой; *w* – горизонтальная проекция профильного следа; *w'* – фронтальная проекция профильного следа; *w''* – профильная проекция профильного следа.

3.5 Взаимное положение двух прямых

Прямые по положению в пространстве бывают:

– параллельными;
– пересекающимися;
– скрещивающимися.

1. Параллельные прямые

Определение: если прямые (*AB* и *CD)* параллельны, то они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек пересечения (рис. 41).

Прямая теорема: если в пространстве прямые (*AB* и *CD)* параллельны, то на чертеже (эпюре) параллельны их одноименные проекции.

Дано: $AB \parallel CD$

Доказать: $ab \parallel cd$; $\text{пл.}ABba \parallel \text{пл.}CDdc$.

$\text{пл.}ABba \parallel \text{пл.}CDdc$ – т. к. каждая из этих плоскостей содержит две перпендикулярные прямые к плоскости *H* и параллельны между собой.

$\{Aa \parallel Cc\} \perp H$; $\{Bb \parallel Dd\} \perp H$.

Отсюда: $ab \parallel cd$.

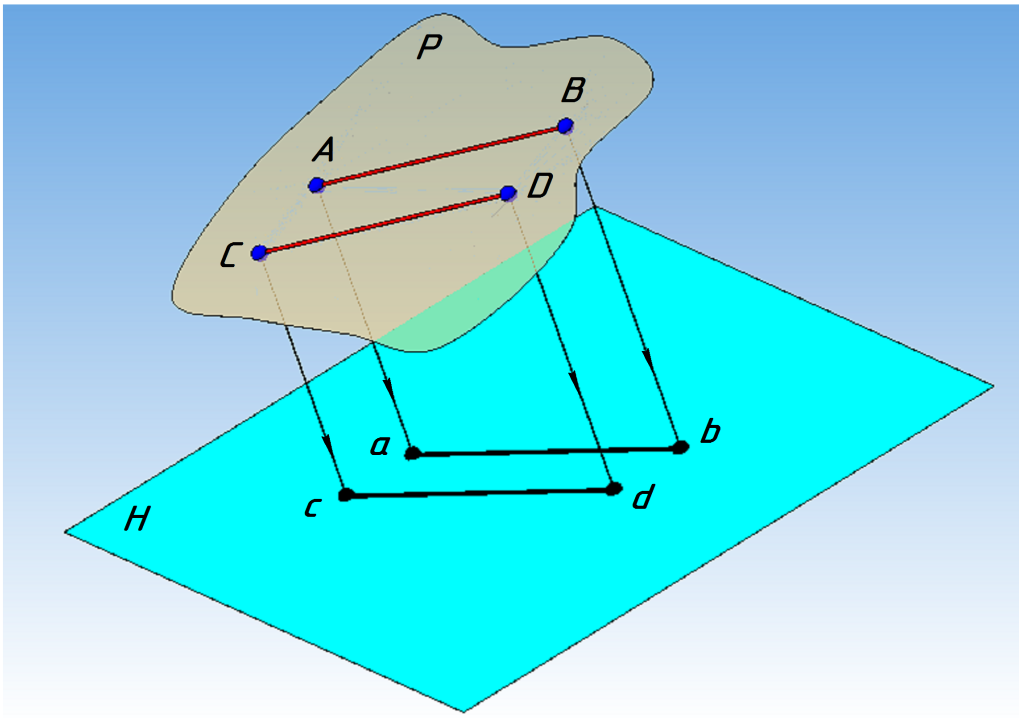


Рисунок 41 – Изображение параллельных прямых

Обратная теорема: если на чертеже одноименные проекции параллельны, то такие прямые параллельны в пространстве[2].

Определить, параллельны ли заданные прямые *AB* и *CD* (рис. 42, а).

Профильные прямые параллельны, если соблюдаются следующие условия:

1. Прямые линии сонаправлены;
2. Соблюдается тождество:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{a'b'}{c'd'} = \frac{ab}{cd} = \frac{m}{n}.$$

1. В заданном примере не соблюдается сонаправленность $\frac{a'b'}{ab} = \frac{c'd'}{cd}$, следовательно, *AB* и *CD* не параллельны и являются скрещивающимися (рис. 42, *а*).

2. Если проекции профильных прямых отвечают первому условию, то справедливость второго требования можно определить графически.

Для этого необходимо соединить проекции отрезков прямыми (рис. 42, *б*).

$a'b' \cap b'c' \Rightarrow (\cdot)1'$; $ad \cap bc \Rightarrow (\cdot)2$.

Таким образом, произведена замена плоскости, заданной двумя параллельными прямыми, плоскостью, заданной двумя пересекающимися прямыми. В связи с тем, что проекции точки пересечения прямых не лежат на одной линии связи, то отрезки прямых не параллельны в пространстве ($AB \nparallel CD$).

[2] Если параллельные прямые являются профильными, обратная теорема справедлива только в системе трёх плоскостей проекций, рис. 42, *в*.

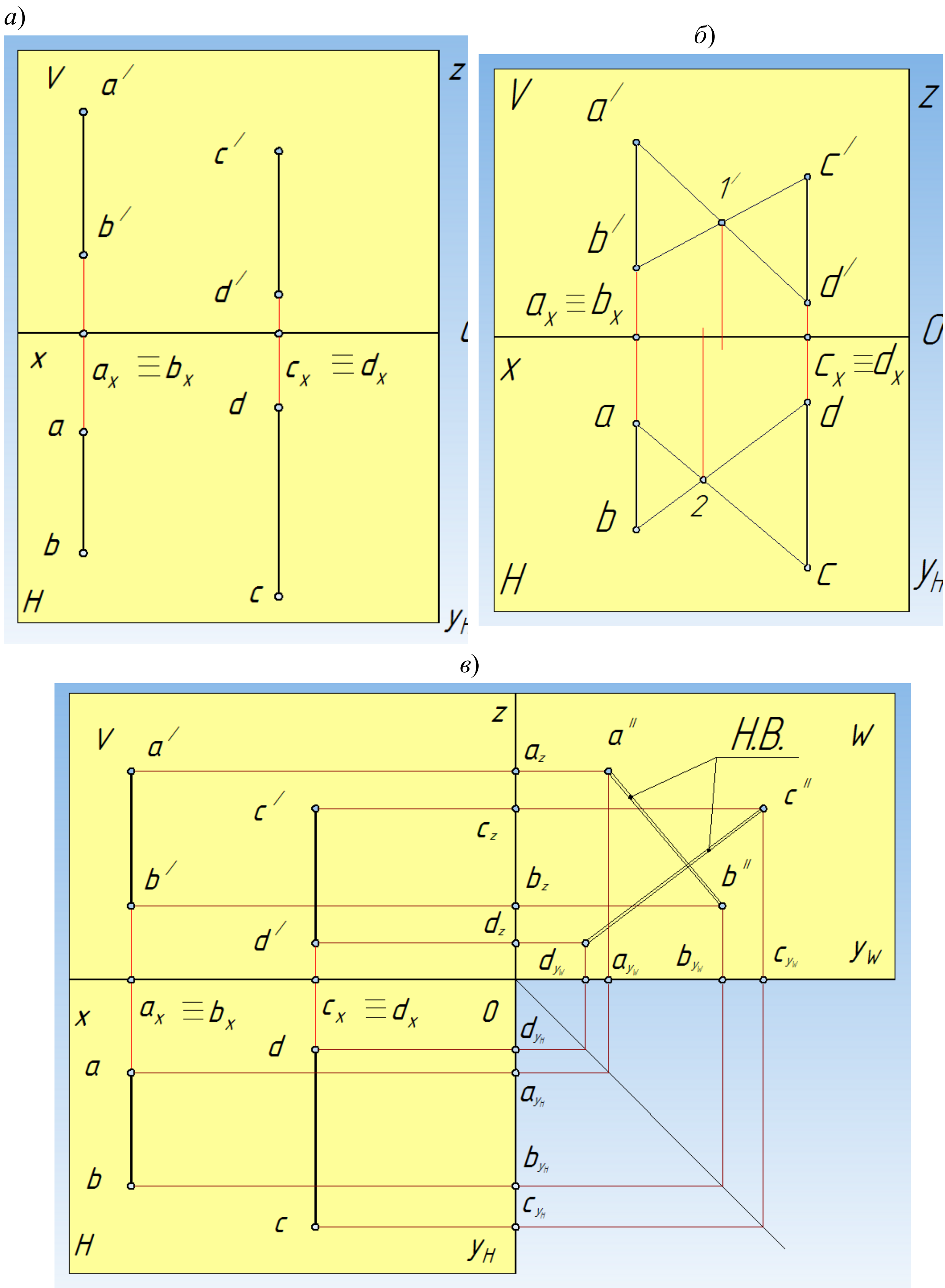


Рисунок 42 – Эпюр, профильные прямые уровня

2. Пересекающиеся прямые

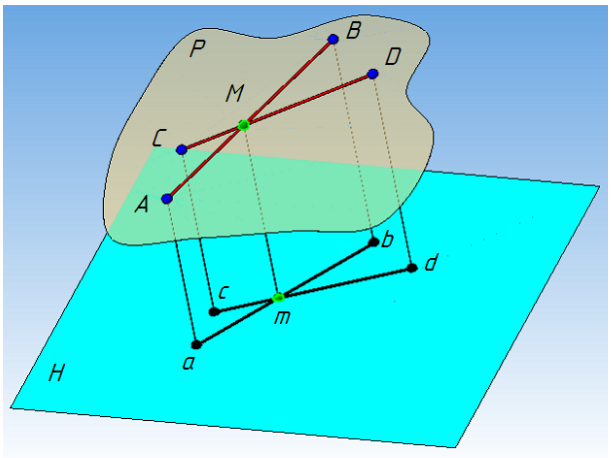


Рисунок 43 – Пересекающиеся прямые

Пересекающиеся прямые – прямые, лежащие в одной плоскости (P) и имеющие одну общую точку пересечения (M) (рис. 43).

Прямая теорема:

Если в пространстве прямые пересекаются, то на чертеже пересекаются их одноименные проекции, а проекции точек пересечения лежат на одной линии связи (рис. 44).

$AB \cap CD = M.$

Обратная теорема:

Если на чертеже (эпюре) одноименные проекции прямых пересекаются, и точки их пересечения лежат на одном перпендикуляре к оси *x*, то такие прямые пересекаются в пространстве (рис. 44).

Если одна из прямых профильная, обратная теорема справедлива только в системе трех плоскостей проекций (*H*, *V*, *W*).

Пример: определить, пересекаются ли заданные прямые AB и CD (рис. 45).

Решение:

$(\cdot)\, K \in CD$; $(\cdot)\, K \notin AB$.

Согласно теореме, прямые не пересекаются (рис. 46).

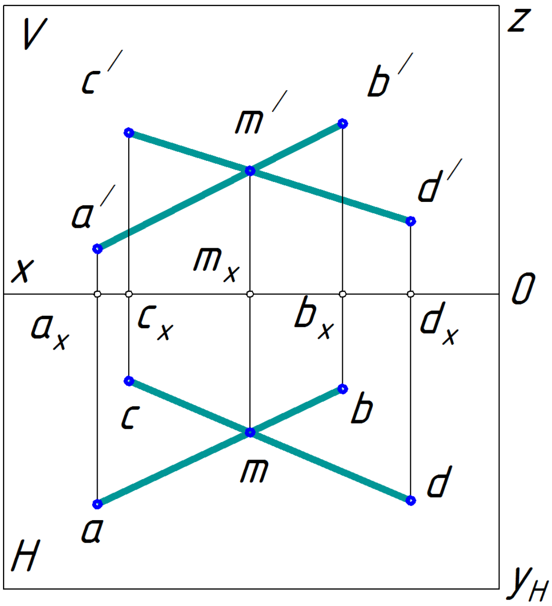


Рисунок 44 – Эпюр,
Пересекающиеся прямые

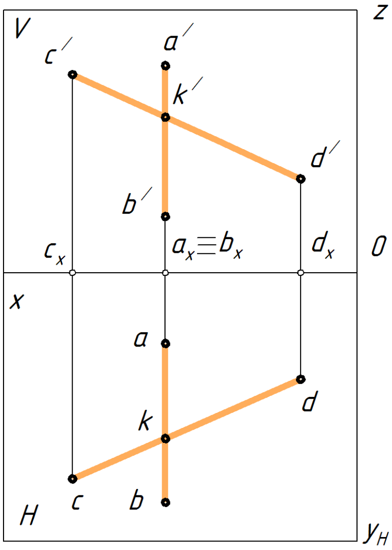


Рисунок 45 – Эпюр. Определить взаимное положение прямых в пространстве

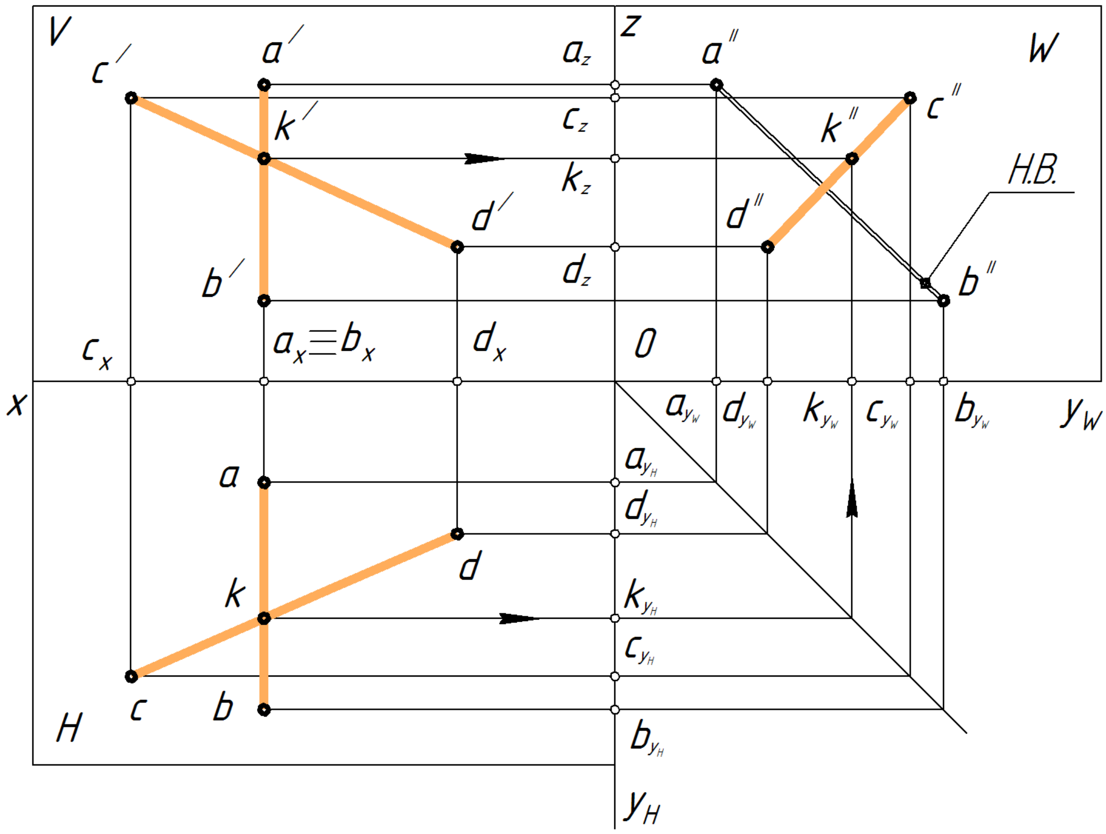


Рисунок 46 – Эпюр, скрещивающиеся прямые

3. Скрещивающиеся прямые

Прямые, не лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек пересечения, называют скрещивающимися (рис. 47).

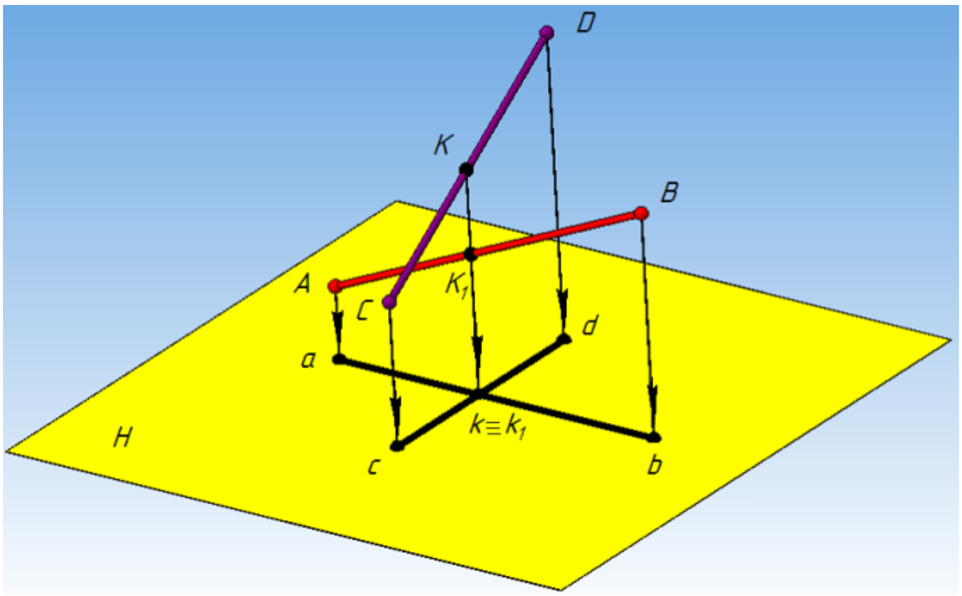


Рисунок 47 – Скрещивающиеся прямые

На чертеже (рис. 48) точки пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых не лежат на одной линии связи.

AB и *CD* являются скрещивающимися прямыми, т. к. проекции точки их пересечения не лежат на одной линии связи.

Для определения видимости скрещивающихся прямых воспользуемся методом конкурирующих точек.

Для того, чтобы определить видимость во фронтальной плоскости проекций *V*, возьмем в фронтальной плоскости точки 1′ и 2′ пересечения фронтальных проекций прямых *a′b′* и *c′d′*. По линии связи находим горизонтальные проекции точек 1 и 2, ставим стрелку (направление взгляда). По методу конкурирующих точек горизонтальная проекция прямой *ab* находится ближе к глазу Наблюдателя, поэтому фиксируем горизонтальную проекцию точки 1 на горизонтальную проекцию прямой *ab*, а точку 2 ставим на горизонтальную проекцию прямой *cd* методом исключения. В связи с тем, что прямая *AB* идет раньше по отношению к фронтальной плоскости проекций *V*, следовательно, фронтальная проекция прямой *AB* будет видима по отношению к фронтальной проекции прямой в пространстве *CD* .

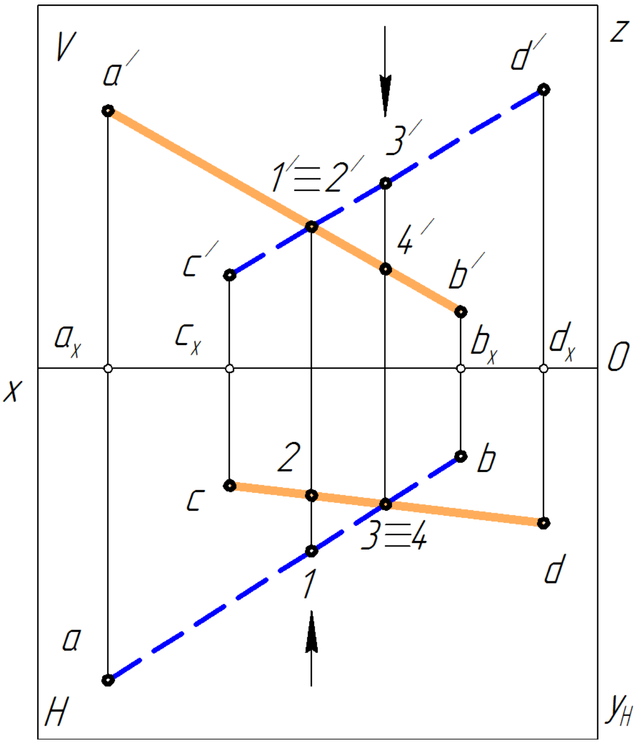


Рисунок 48 – Эпюр, скрещивающиеся прямые

Для того чтобы определить видимость в горизонтальной плоскости проекций *H* (смотрим на фронтальную проекцию *V*), возьмем во фронтальной плоскости точки 3 и 4 пересечения горизонтальных проекций прямых *ab* и *cd*. По линии связи находим фронтальные проекции точек 3′ и 4′, ставим стрелку (направление взгляда). По методу конкурирующих точек фронтальная проекция прямой *c'd'* находится ближе к глазу Наблюдателя, поэтому ставим фронтальную проекцию точки 3' на фронтальную прекцию прямой *c'd'*, а точку 4' ставим на фронтальную проекцию прямой *a'b'* методом исключения.

Таким образом, прямая *CD* идет раньше по отношению к горизонтальной плоскости проекций *H*, следовательно, горизонтальная проекция прямой *CD* будет видима по отношению к горизонтальной проекции *AB*.

На чертеже видимые линии показаны основными линиями, а невидимые штриховой линией.

3.6 Деление отрезка прямой в заданном отношении

Если в пространстве точка делит отрезок прямой в каком-либо отношении, то на чертеже проекции точки делят одноименные проекции отрезка в таком же отношении (рис. 49).

Известно: AB – прямая общего положения; ab – проекция AB; $(\cdot)K \in AB$.

Доказать: $\frac{AK}{KB} = \frac{ak}{kb}$.

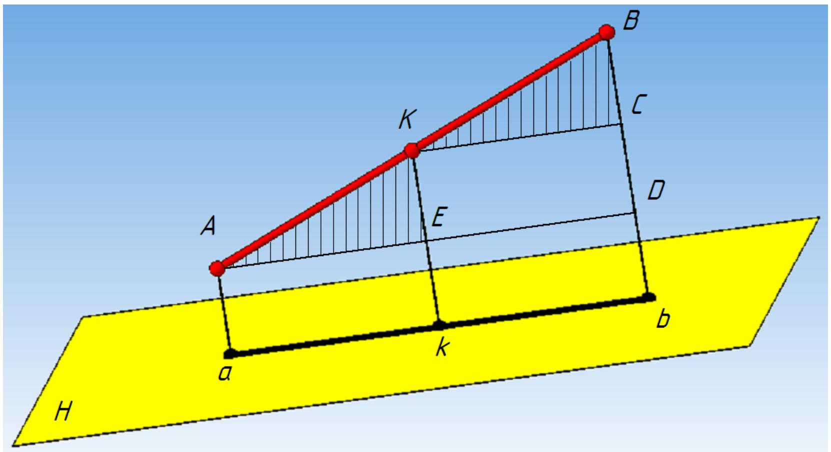


Рисунок 49 – Схема деления отрезка прямой в заданном отношении

Через $(\cdot)A$ проводим $AD \parallel ab$. $AE = ak$; через $(\cdot)K$ проводим $KC \parallel ab$. $KC = kb$. Рассмотрим прямоугольные треугольники $\Delta\, AEK$ и $\Delta\, KCB$. $\Delta\, AEK$ и $\Delta\, KCB$ – подобны. Отсюда: $\frac{AK}{KB} = \frac{ak}{kb}$, заменяя $AE = ak$, $MC = kb$, получим $\frac{AK}{KB} = \frac{ak}{kb}$.

Пример: разделить отрезок AB в отношении $\frac{2}{3}$.

Решение не зависит, в какой плоскости выполняется деление отрезка AB в заданном отношении. В горизонтальной плоскости H на рис. 50 проведена произвольная прямая под острым углом, от точки a.

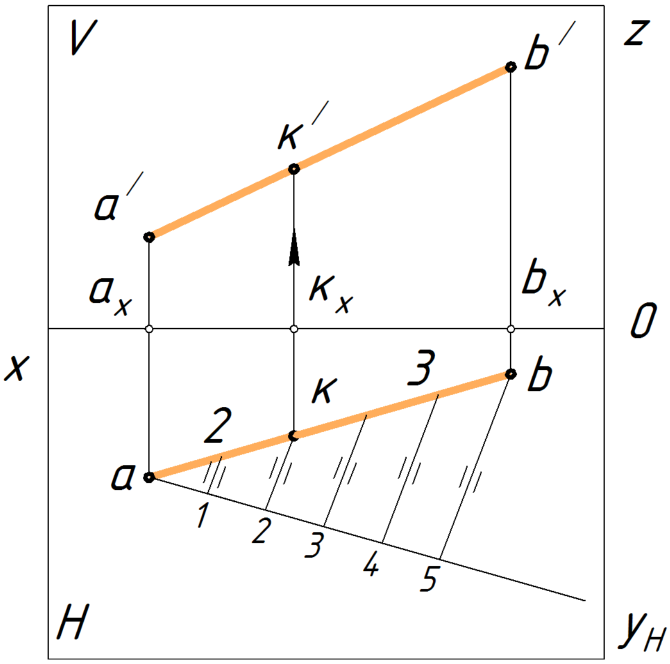


Рисунок 50 – Эпюр, деление отрезка в заданном отношении

Отрезок прямой делим на пять равных частей (в сумме 2 + 3). Последняя (5) точка соединяется с горизонтальной проекцией точки *b*. Последующие лучи от точек 1, 2, 3 и 4 проводятся параллельно лучу *b*5 до отрезка *ab*. Ввиду того, что отношение отрезка *AB* направлено от точки *A* к точке *B*, то точка *K* делит отрезок *AB* в отношении 2:3[3].

$$\frac{AK}{KB} = \frac{ak}{kb} = \frac{a'c'}{c'b'} = \frac{2}{3}$$

Используем теорему Фалеса.

3.7 Проецирование углов

Если две стороны какого-либо угла параллельны плоскости проекций, то угол на эту плоскость проецируется без искажения (рис. 51).

Если одна сторона острого (тупого) угла параллельна плоскости проекций, то острый угол проецируется в острый угол, но меньшего размера, а тупой угол в тупой, но большего размера.

Теорема о частном случае проецирования прямого угла

Если одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется в натуральную величину без искажения (рис. 52).

Известно, что $\angle ABC = 90°$; $BC \parallel H$.

Доказать, что $\angle abc = 90°$.

[3] Для нахождения натуральной величины отрезка *AB* и его отношения можно применить метод прямоугольного треугольника (рис. 21).

Доказательство: $BC \perp AB$ – из условия; $Bb \perp H$; $Bb \perp H$; $BC \perp Bb$; $BC \perp Q$ – т. к. она перпендикулярна пересекающимся прямым.

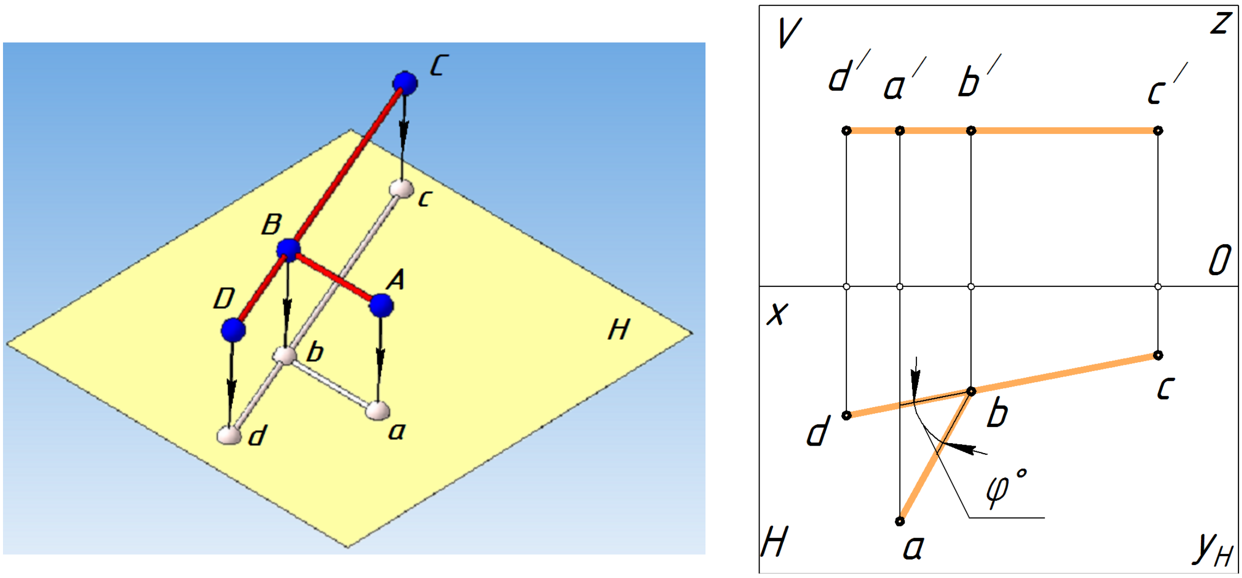


Рисунок 51 – Наглядное изображение и эпюр, проецирование угла

$$Dd = Aa = Bb = Cc$$

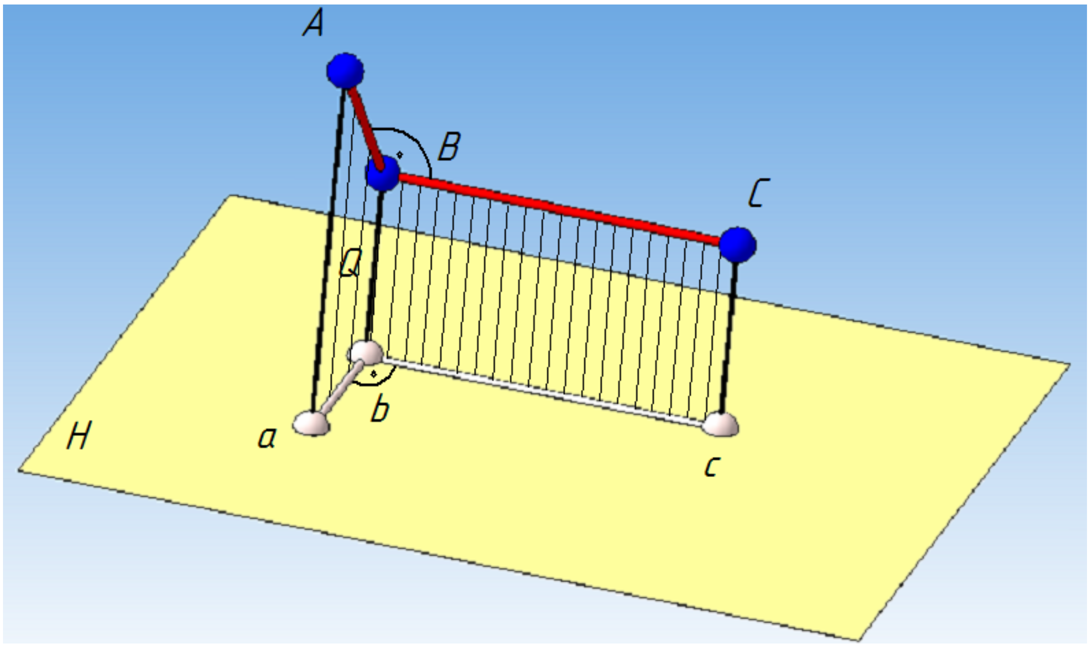


Рисунок 52 – Наглядное изображение, проецирования прямого угла

$AB \cap Bb$; $BC \parallel bc$.

Следовательно, $bc \perp Q$.

Отсюда: $bc \perp ab$; $\angle abc = 90°$.

Теорема дает нам право на проведение перпендикуляра к прямой, если она параллельна плоскости проекций.

– Прямая общего положения и горизонтальная прямая уровня перпендикулярны, если перпендикулярны их горизонтальные проекции (рис. 53, *а*).

– Прямая общего положения и фронтальная прямая перпендикулярны, если перпендикулярны их фронтальные проекции (рис. 53, *б*).

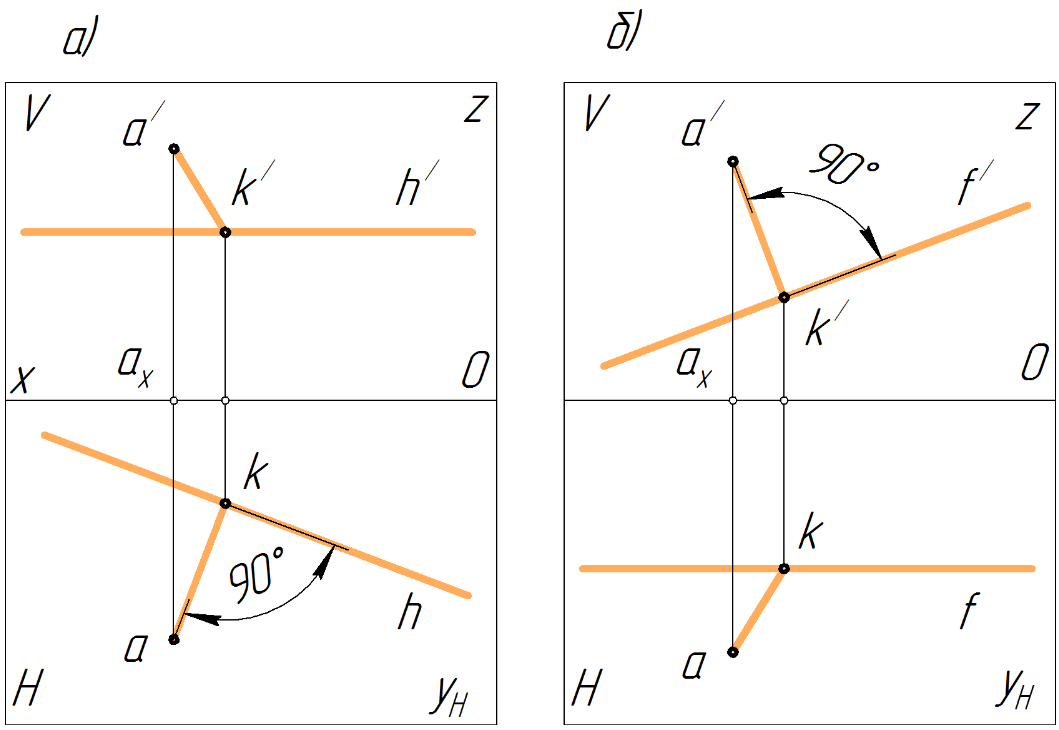


Рисунок 53 – Эпюр, проецирование прямого угла

Контрольные вопросы к теме 3

1. При каком положении относительно плоскостей проекций прямая называется прямой общего положения?
2. Как доказывается, что чертеж, содержащий две связанные между собой проекции в виде отрезков прямой линии, выражает именно отрезок прямой линии?
3. Как выражается соотношение между проекцией отрезка прямой и самим отрезком?
4. Как расположена прямая в системе трех плоскостей, если все три проекции отрезка этой прямой равны между собой?
5. Как построить профильную проекцию отрезка прямой общего положения по данным фронтальной и горизонтальной проекциям?
6. Как выполнить построение по предыдущему вопросу на чертеже без осей проекций?
7. Какие положения прямой линии называют "особыми" (в частном случае)?
8. Как располагается фронтальная проекция отрезка прямой линии, если его горизонтальная проекция равна самому отрезку?
9. Как располагается горизонтальная проекция отрезка прямой линии, если его фронтальная проекция равна самому отрезку?
10. Какое свойство параллельного проецирования касается отношения отрезков прямой линии?
11. Как разделить на чертеже отрезок прямой линии в заданном отношении?
12. Что называется следом прямой линии на плоскости проекций?
13. Какая координата равна нулю: а) для фронтального следа прямой, б) для горизонтального следа прямой?

14. Где располагается горизонтальная проекция фронтального следа прямой линии?

15. Где располагается фронтальная проекция горизонтального следа прямой линии?

16. Может ли быть случай, когда прямая линия в системе имеет следы на каждой из этих плоскостей проекций, сливающиеся в одну точку?

17. Как построить истинный вид отрезка прямой, используя метод прямоугольного треугольника?

18. Каким условиям должны отвечать углы между прямой общего положения и плоскостями проекций?

19. Взаимное положение двух прямых в пространстве?

20. Признаки параллельности прямых на чертеже? Назовите теорему.

21. Когда прямые скрещиваются и как определить их положение на чертеже?

22. Когда прямые пересекаются и как определить их положение на чертеже?

23. Когда угол, образованный двумя прямыми, проецируется на плоскость проекций без искажения?

24. В каком случае прямой угол проецируется без искажения (теорема о проецировании прямого угла)?

25. Если одна из сторон острого угла параллельна плоскости проекции, то угол проецируется в … (дополнить формулировку).

26. Если одна из сторон тупого угла параллельна плоскости проекции, то угол проецируется в … (дополнить формулировку).

Тема 4 Плоскость

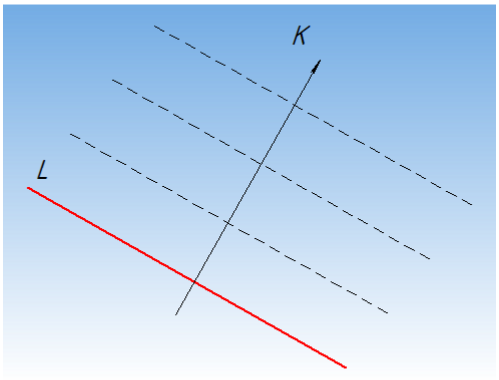


Рисунок 54 – Кинематический способ задания плоскости

Плоскостью называется бесконечное множество точек, получаемое движением прямой линии *L* по направляющей прямой *K*, которая при своем движении постоянно остается параллельна самой себе (рис. 54).

Все точки плоскости неограниченно распространяются во все стороны.

4.1 Способы задания плоскости на чертеже

- Тремя точками, не лежащими на одной прямой, рис. 55, *а*.
- Прямой и точкой, точка не принадлежит данной прямой, рис. 55, *б*.
- Двумя параллельными прямыми, рис. 56, *а*.
- Двумя пересекающимися прямыми, рис. 56, *б*.
- Любой плоской фигурой в виде отрезка, рис. 56, *в*, *г*.
- Следами плоскости P_V, P_H, P_W .
- Параметрами плоскости или точками схода следов плоскости (P_x, P_z, P_y).

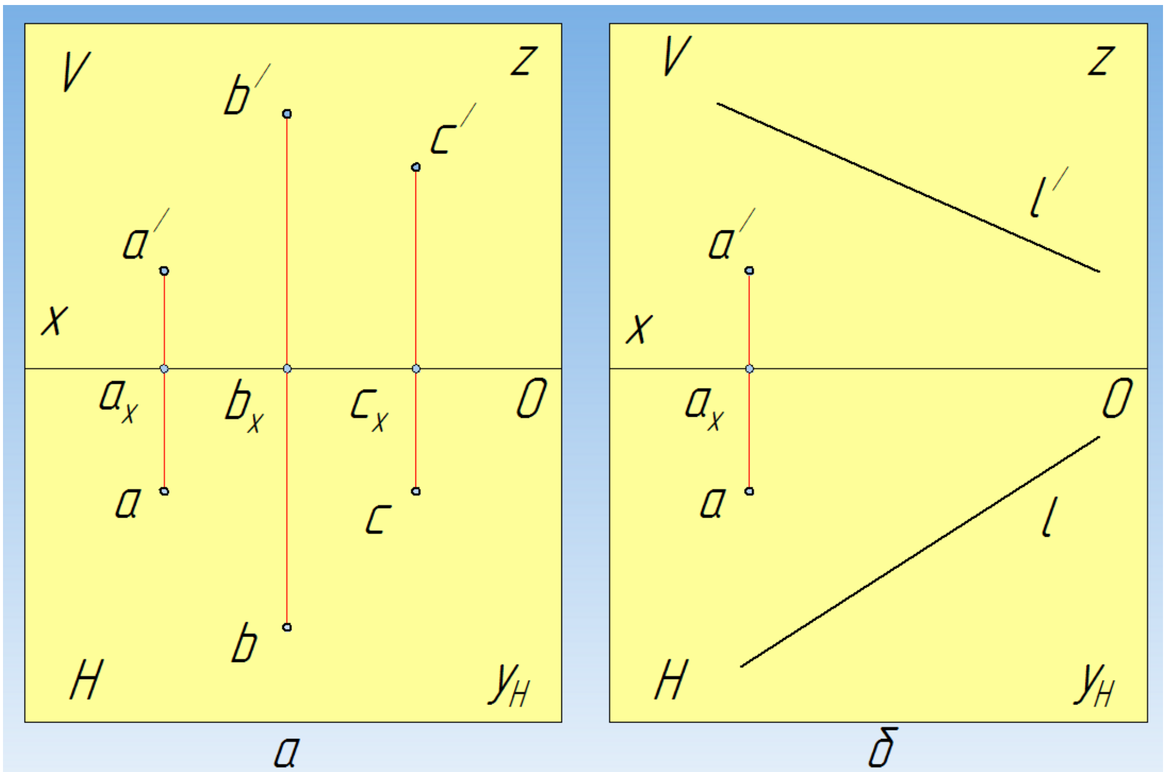


Рисунок 55 – Эпюры, задание плоскости на чертеже

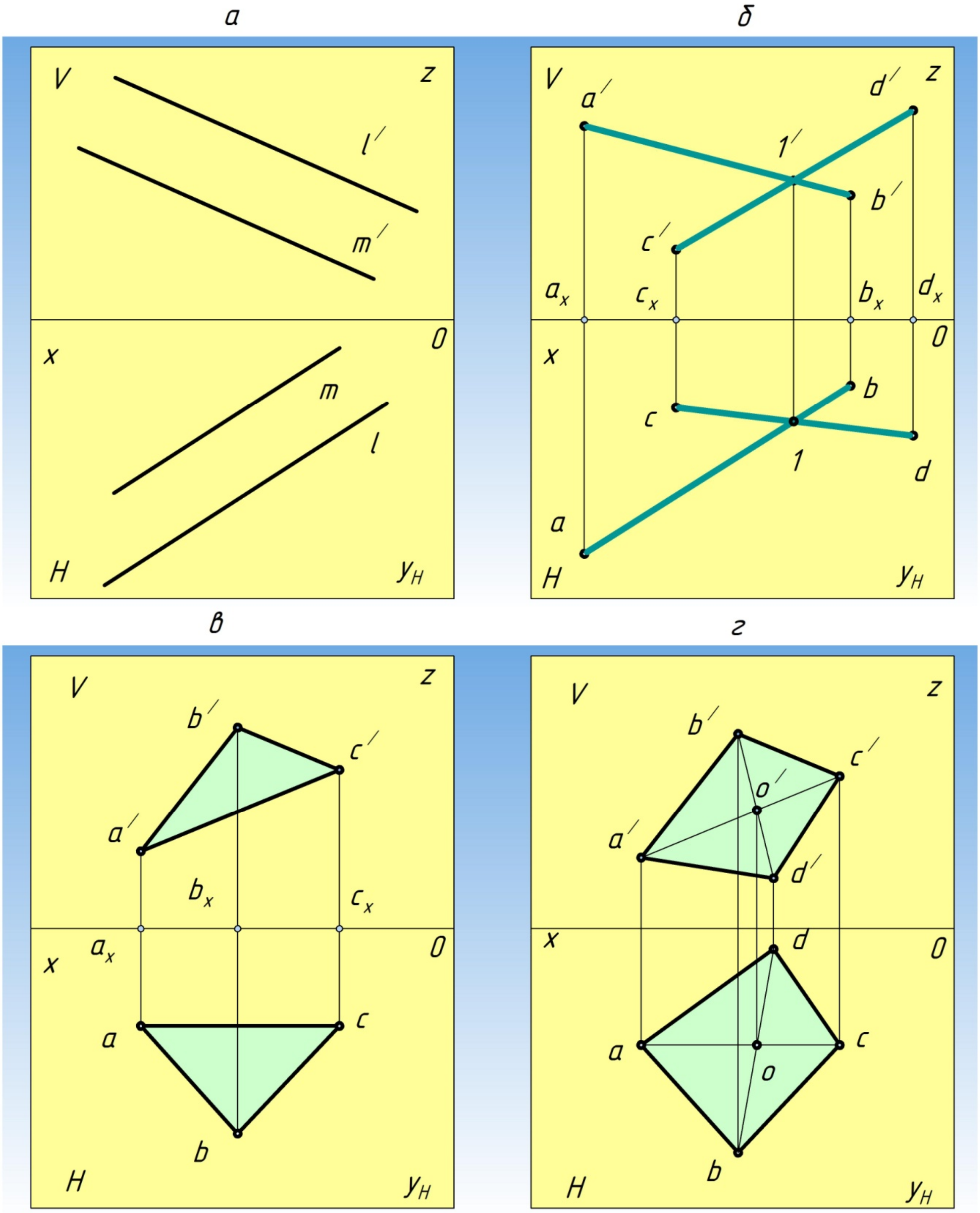


Рисунок 56 – Эпюры, задание плоскости

На рис. 56, *в* представлена плоскость, заданная треугольником *ABC*.

Для построения *n*-угольника у которого количество вершин больше трех, необходимо доказать, что проекция плоскости – это плоскость. Для этого покажем четырехугольник *ABCD* (рис. 56, *г*) и сразу проверяем плоскость, заменяя двумя пересекающимися прямыми

$$AC \cap BD = O.$$

Если условие не соблюдается, тогда проекции плоскости – это не плоскость.

Линии пересечения заданной плоскости с плоскостями проекций называются следами.

Точки пересечения следов с плоскостями проекций называются параметрами плоскости, или точками схода следов, которые лежат на соответствующих координатных осях (рис. 57, 58).

Плоскость, наклоненная ко всем плоскостям проекций, называется плоскостью общего положения.

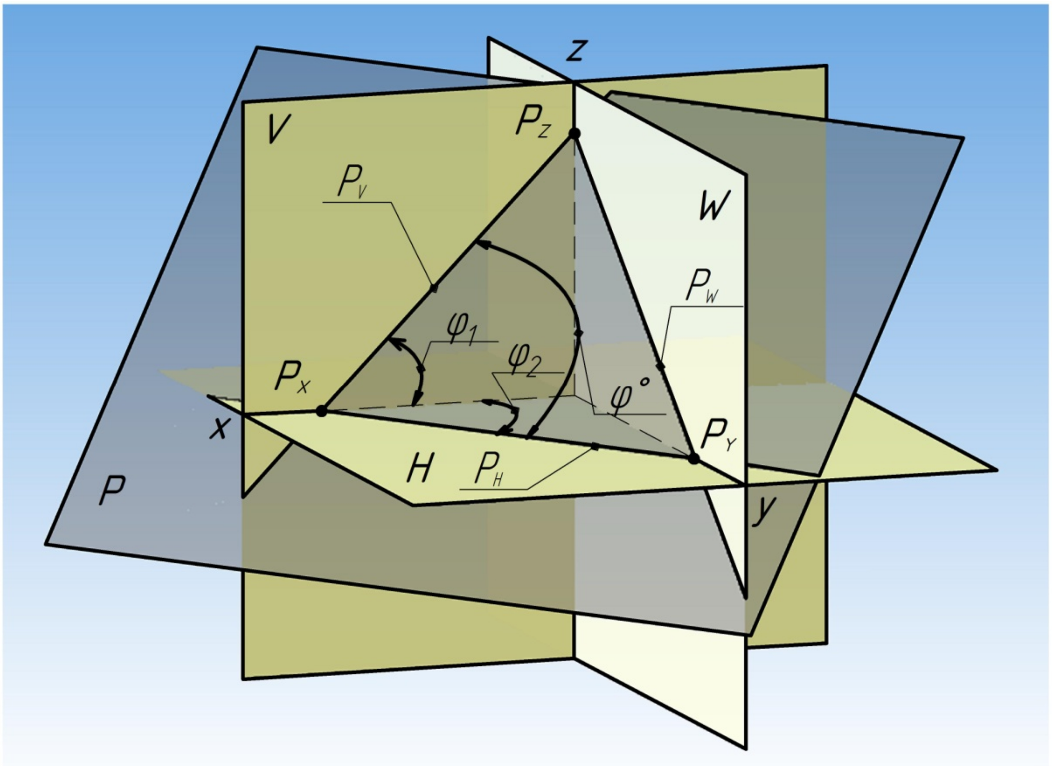


Рисунок 57 – Проецирующий аппарат, плоскость *P* – общего положения

P – плоскость общего положения, где $\angle\varphi^0$– действительный угол между следами P_V и P_H; $\angle\varphi°_1 \neq 90°$; $\angle\varphi°_2 \neq 90°$;

P_H – горизонтальный след плоскости;

P_V – фронтальный след плоскости;

P_W – профильный след плоскости;

P_x – точка схода следов, фронтального и горизонтального следа плоскости. $P_V \cap P_H = P_x$;

P_z – точка схода следов, фронтального и профильного следа плоскости. $P_V \cap P_W = P_z$;

P_y $(P_{y_H}$ и $P_{y_W})$ – точка схода следов, горизонтального и профильного следа плоскости. $P_H \cap P_W = P_y$.

Горизонтальный след плоскости P_H – это линия пересечения плоскости *P* с горизонтальной плоскостью проекций *H*. $P \cap H$.

Фронтальная проекция горизонтального следа плоскости всегда лежит на оси *x* и ее на чертеже условно не показывают.

Горизонтальная проекция горизонтального следа плоскости всегда совпадает с самим следом плоскости и на чертеже ее условно показывают P_H.

Фронтальный след плоскости P_V – это линия пересечения плоскости *P* с фронтальной плоскостью проекций *V*. $P \cap V$.

Горизонтальная проекция фронтального следа плоскости всегда лежит на оси *x* и на чертеже ее условно не показывают.

Фронтальная проекция фронтального следа плоскости всегда совпадает с самим следом плоскости и на чертеже ее условно показывают P_V.

Профильный след плоскости P_W – это линия пересечения плоскости *P* с профильной плоскостью проекций *W*. $P \cap W$.

Горизонтальная проекция профильного следа плоскости всегда лежит на оси *y* и на чертеже ее условно не показывают.

Фронтальная проекция профильного следа плоскости всегда совпадает с самим следом плоскости и на чертеже ее условно показывают P_W.

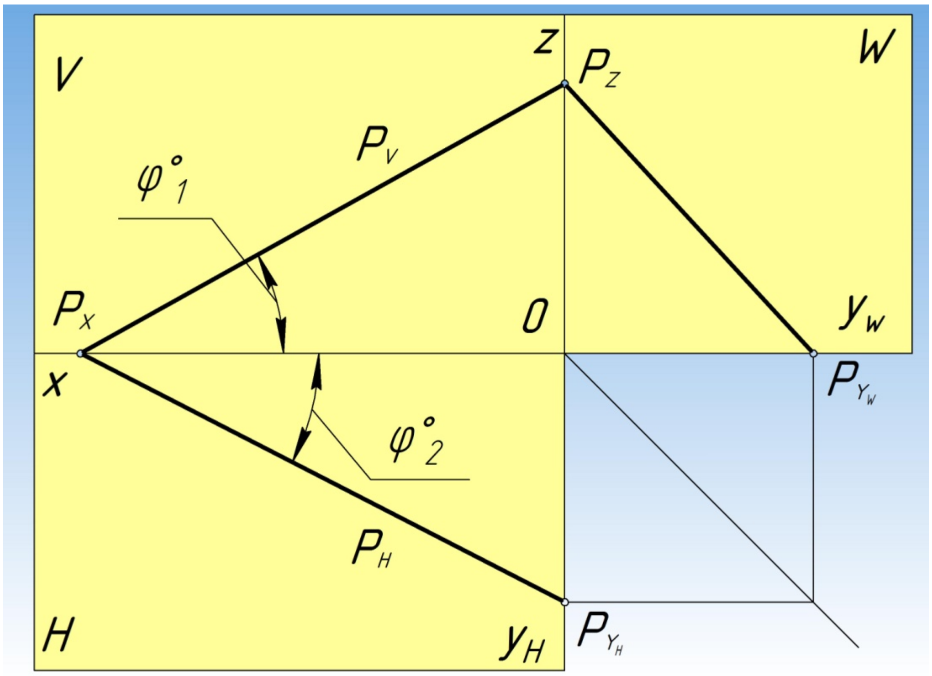


Рисунок 58 – Эпюр, следы плоскости общего положения

4.2 Плоскости частного положения

I. Проецирующие плоскости

II. Плоскости уровня

I. <u>Проецирующая плоскость</u> – это плоскость, перпендикулярная к одной изплоскостей проекций (*H, V, W*).

- Горизонтально-проецирующая плоскость, рис. 59, 60, 61.
- Фронтально-проецирующая плоскость, рис. 62, 63, 64.
- Профильно-проецирующая плоскость, рис. 65, 66, 67.

1. Горизонтально-проецирующая плоскость – плоскость (*P*), перпендикулярная к горизонтальной плоскости проекций *H*.

$P \perp H$; $\angle\beta° \neq 90°$; $\varphi_1 = 90°$.

$\angle\beta°$ – угол наклона к фронтальной плоскости проекций.

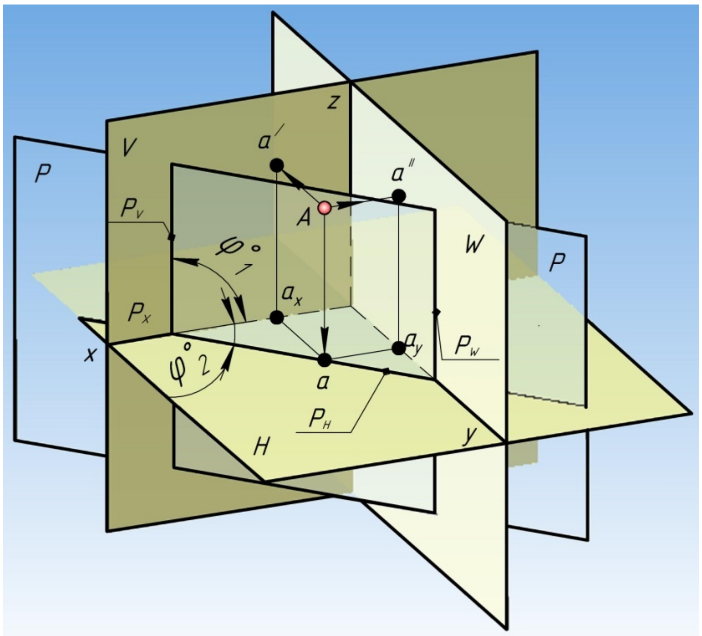


Рисунок 59 – Проецирующий аппарат,
горизонтально-проецирующая плоскость

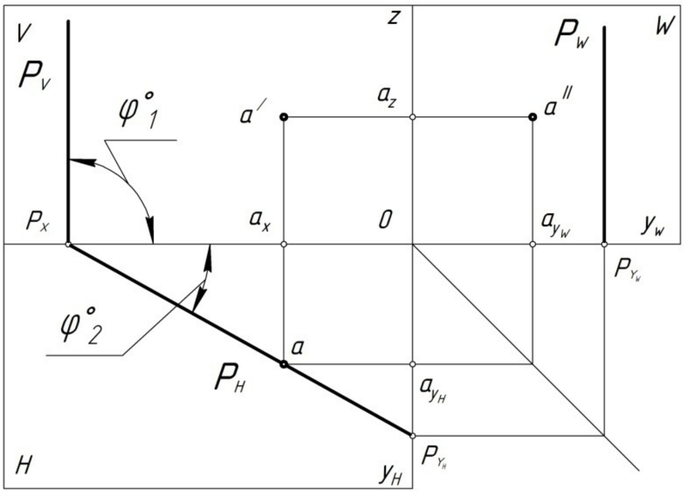


Рисунок 60 – Эпюр, горизонтально-проецирующая плоскость

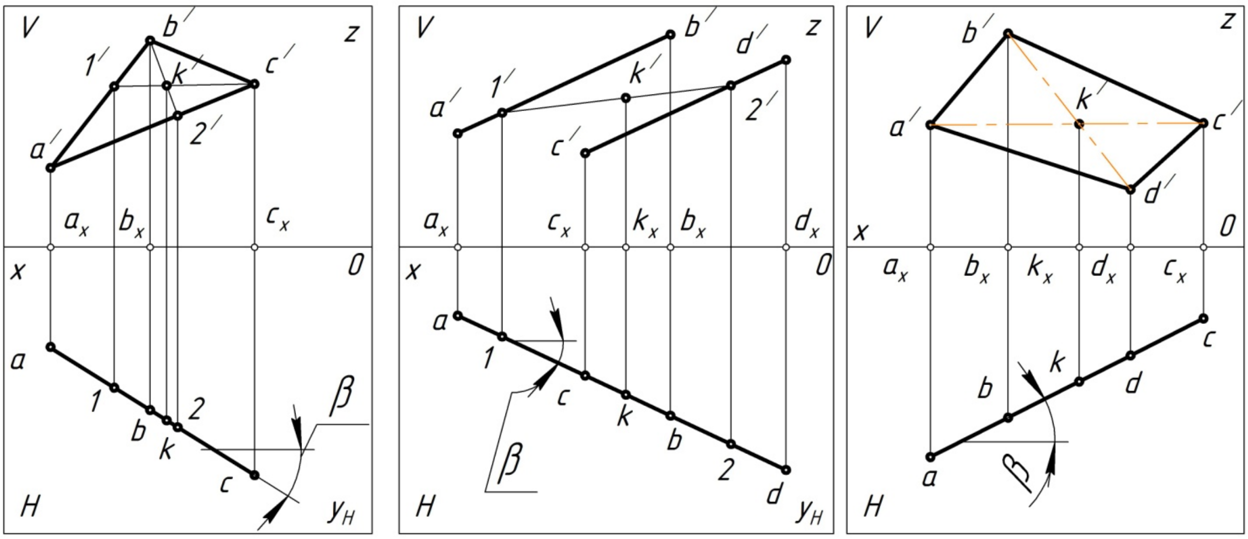


Рисунок 61 – Проецирующие плоскости, заданные плоскими фигурами

2. Фронтально-проецирующая плоскость – плоскость (*P*), перпендикулярная фронтальной плоскости проекций *V*.

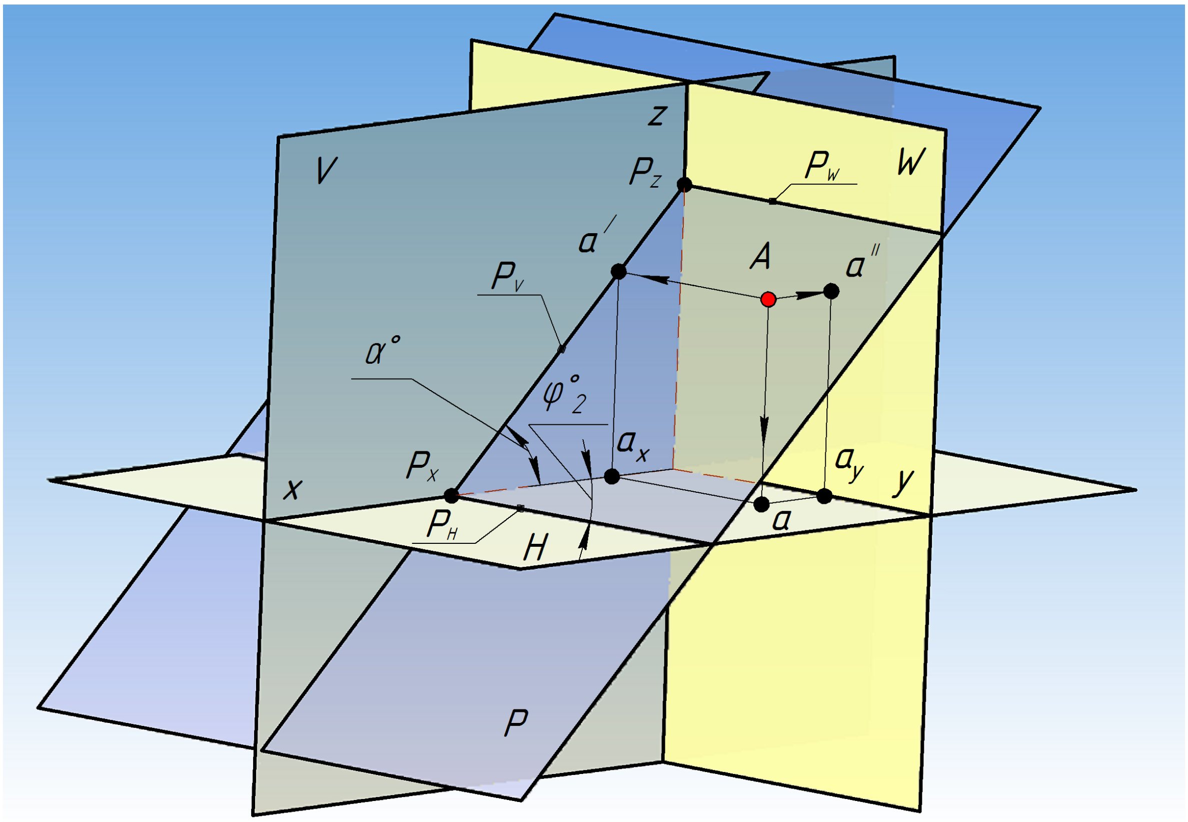


Рисунок 62 – Проецирующий аппарат, фронтально-проецирующая плоскость

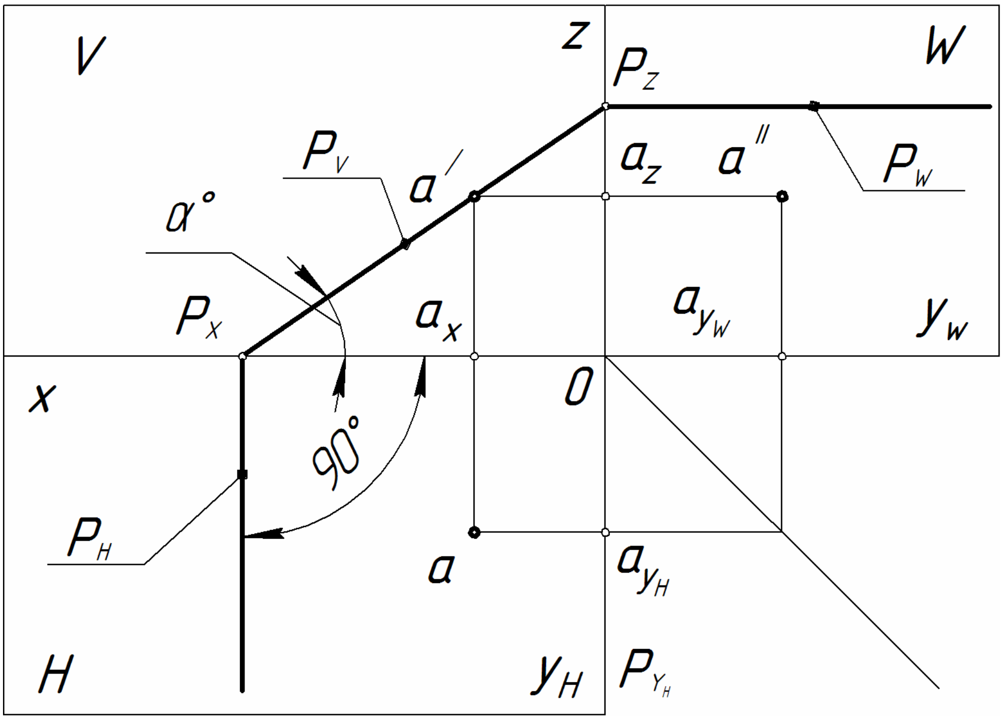
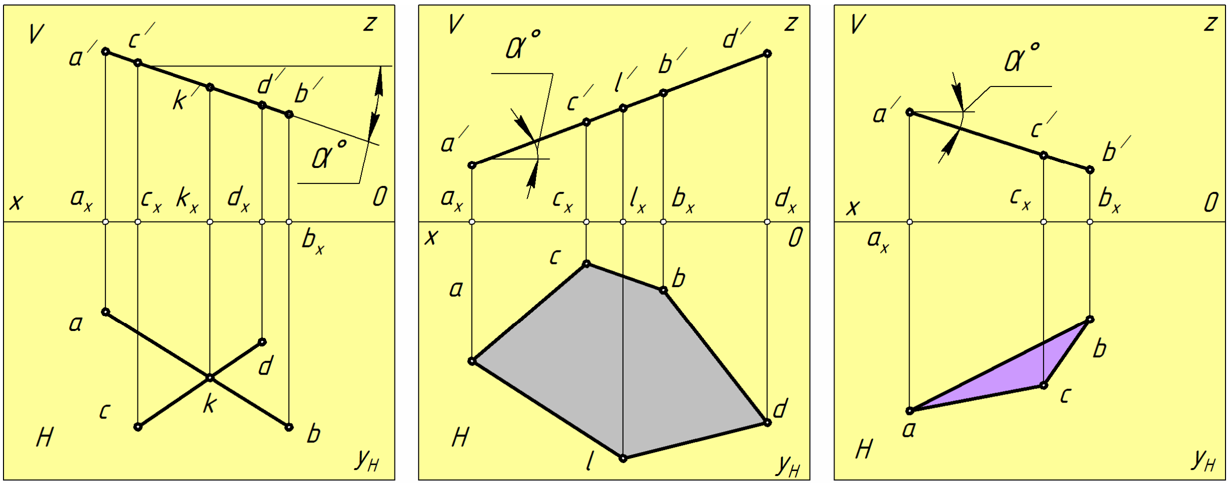


Рисунок 63 – Эпюр, фронтально-проецирующая плоскость

$P \perp V;\qquad \angle\alpha° \neq 90°$

Рисунок 64 – Проецирующие плоскости, заданные плоскими фигурами



3. Профильно-проецирующая плоскость – плоскость (*P*), перпендикулярная профильной плоскости проекций *W*.

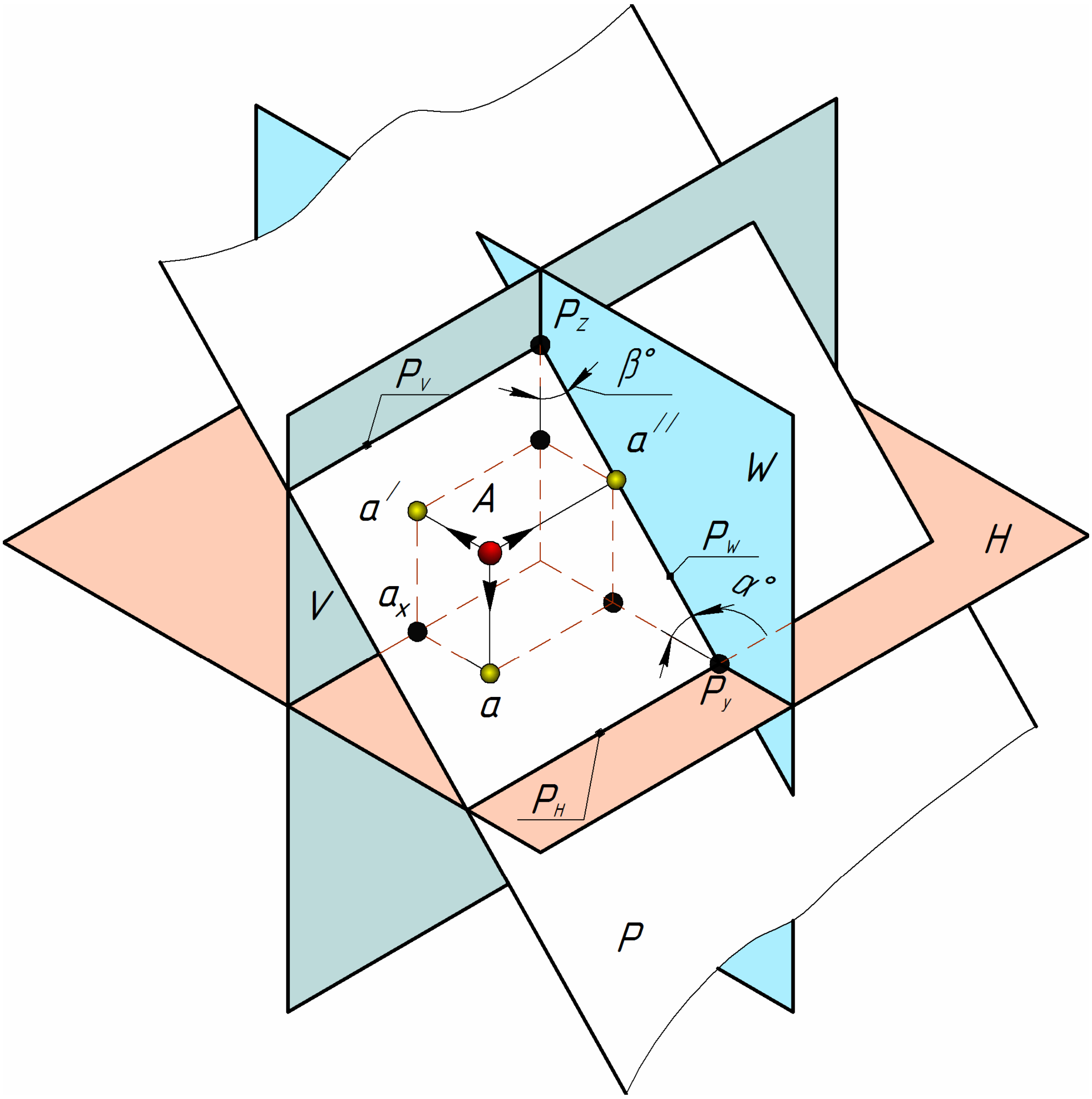


Рисунок 65 – Проецирующий аппарат, профильно-проецирующая плоскость

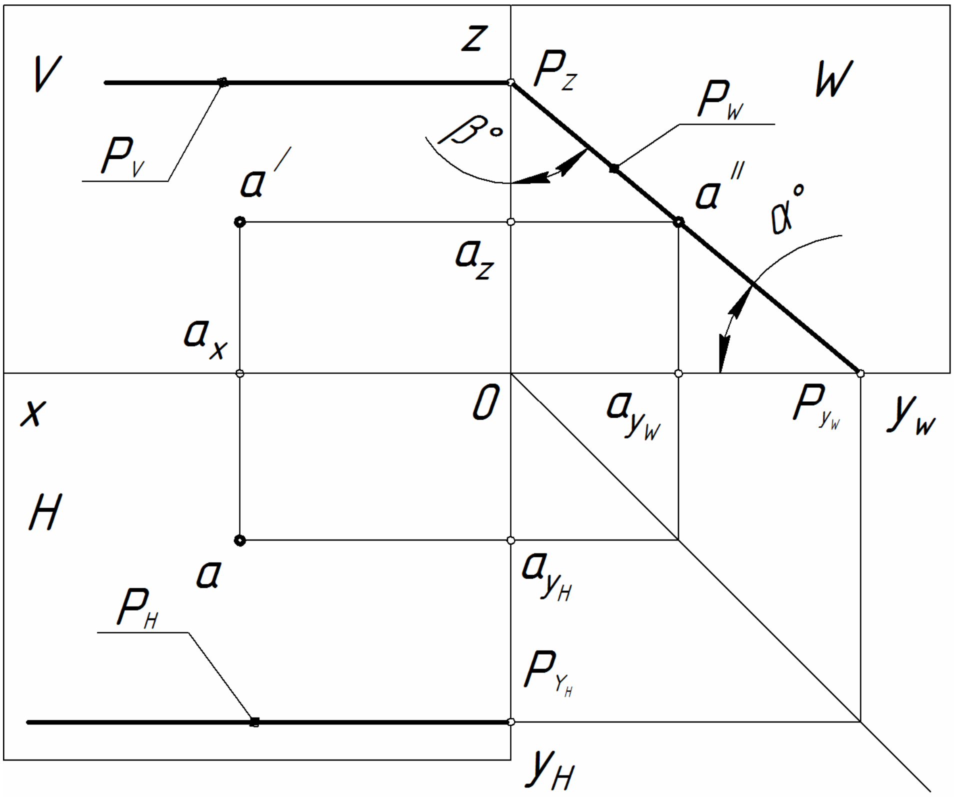


Рисунок 66 – Эпюр, профильно-проецирующая плоскость
$P \perp W$; $P_V \parallel 0x$; $P_H \parallel 0x$; $\angle\alpha°$ – угол наклона к горизонтальной плоскости проекций;
$\angle\beta°$ – угол наклона к фронтальной плоскости проекций

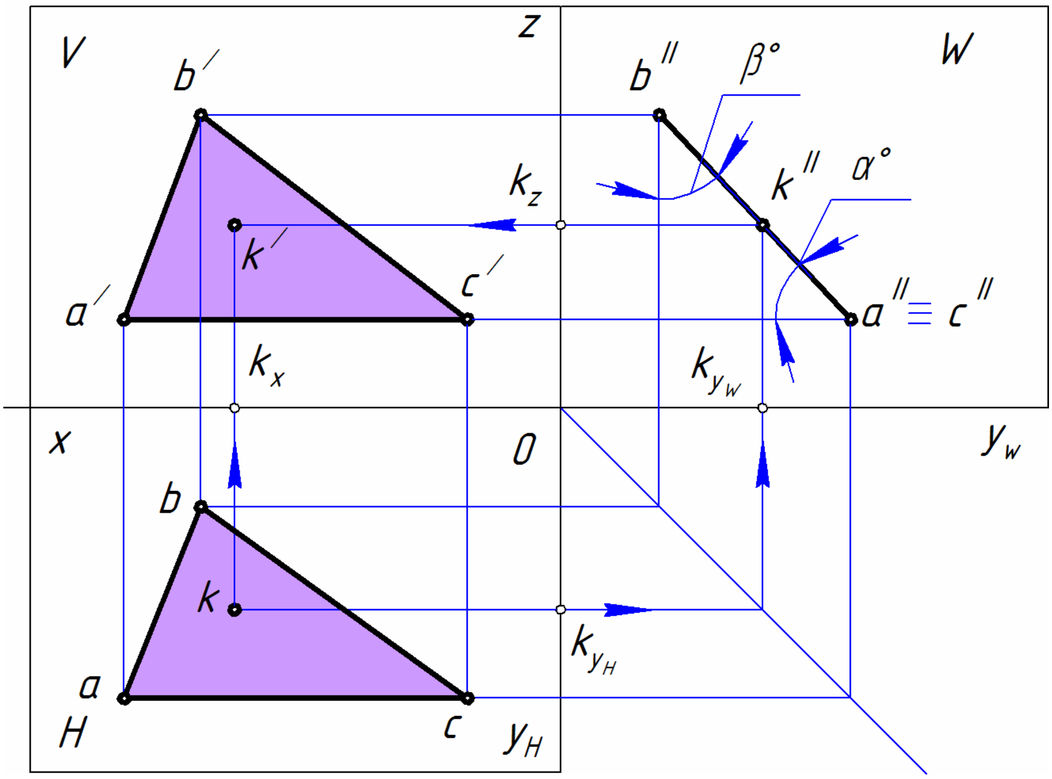


Рисунок 67 – Проецирующая плоскость, заданная плоской фигурой

Из построения видно, что плоскость *ABC* является профильно-проецирующей, рис. 67, т. к. все вершины треугольника проецируются на профильную плоскость проекций в одну линию.

Пример: провести профильно-проецирующую плоскость, равноудаленную от горизонтальной *H* и фронтальной *V* плоскостей проекций (рис. 68, 69).

Плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из прямых лежащая в плоскости, перпендикулярна плоскости проекций.

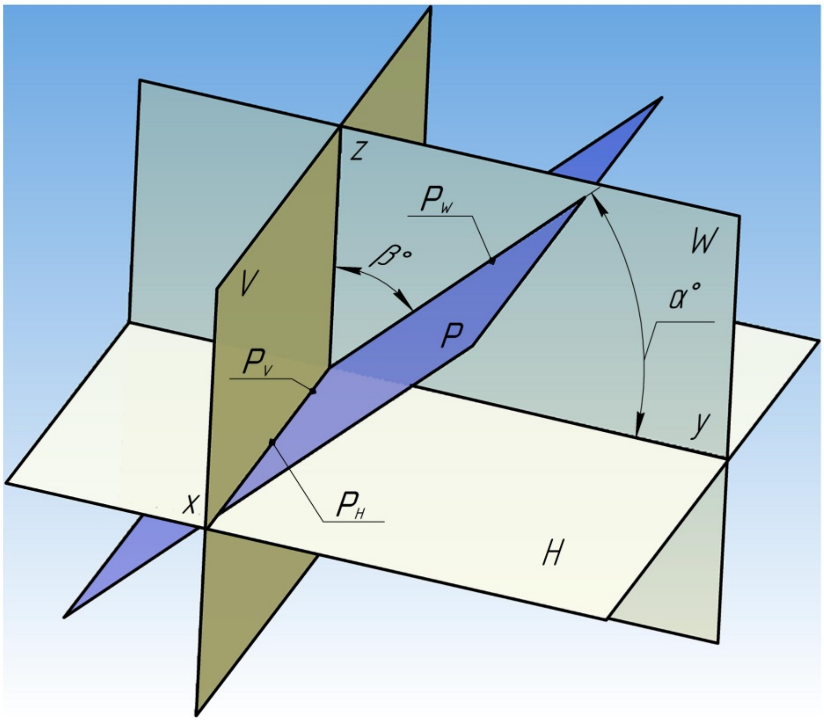


Рисунок 68 – Проецирующий аппарат, профильно-проецирующей плоскости проходящей через ось *x*

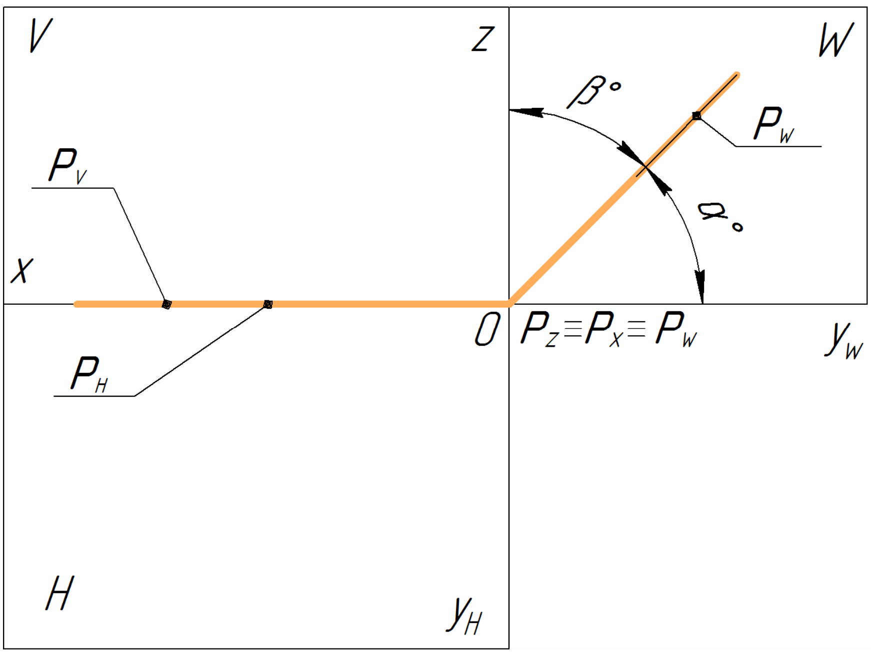


Рисунок 69 – Эпюра профильно-проецирующей плоскости

$\angle\alpha° = 45°$ $\angle\beta° = 45°$

Отмечаем собирательное свойство всех проецирующих плоскостей – проекции всех точек, принадлежащих этой плоскости, проецируются на след плоскости, в которую проецируется сама плоскость.

II. Плоскости уровня

Плоскости, параллельные плоскостям проекций, называют плоскостями уровня:

– горизонтальная плоскость уровня;
– фронтальная плоскость уровня;
– профильная плоскость уровня.

1. Горизонтальная плоскость уровня (рис. 70, 71) – плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций.

$$P \parallel H; \qquad P \perp V; \qquad P \perp W.$$

Возьмем некоторую плоскость $P \parallel H$. Тогда $P_V \parallel 0x$, $P_W \parallel 0y$.

Фронтальные проекции всех точек плоскости P принадлежат фронтальному следу плоскости P_V.

Профильные проекции всех точек плоскости P принадлежат профильному следу P_W плоскости.

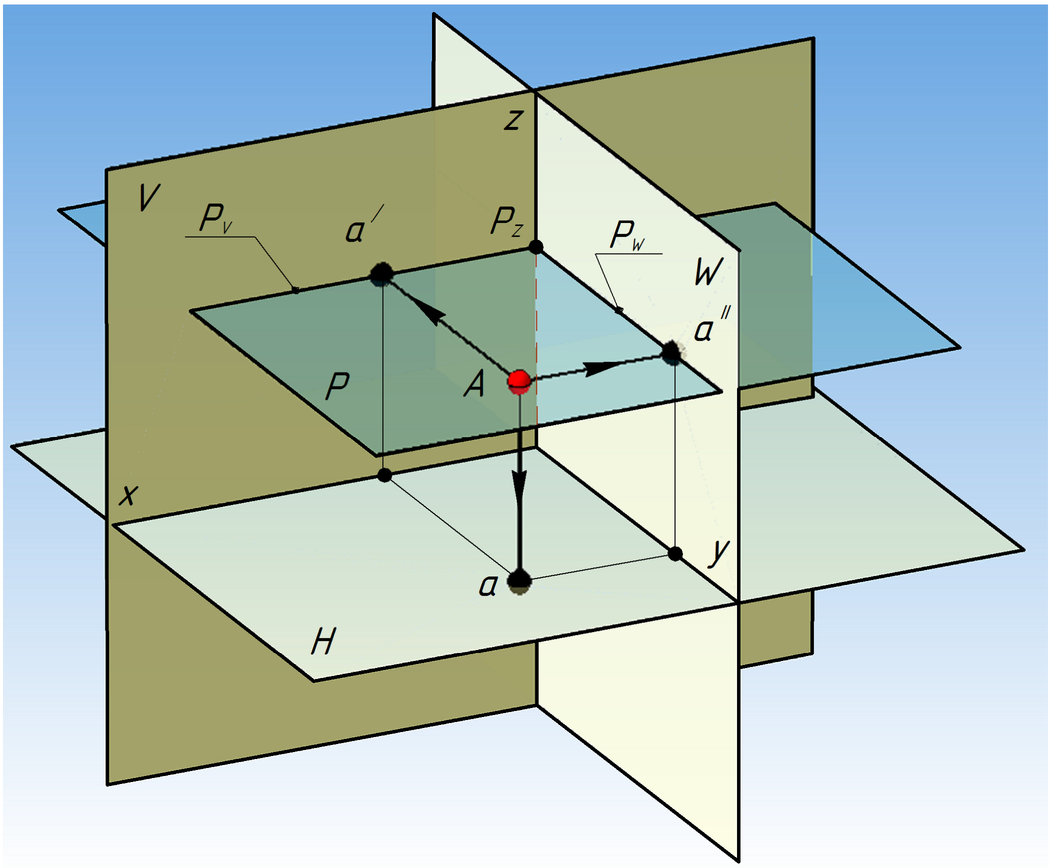


Рисунок 70 – Проецирующий аппарат, горизонтальная плоскость уровня

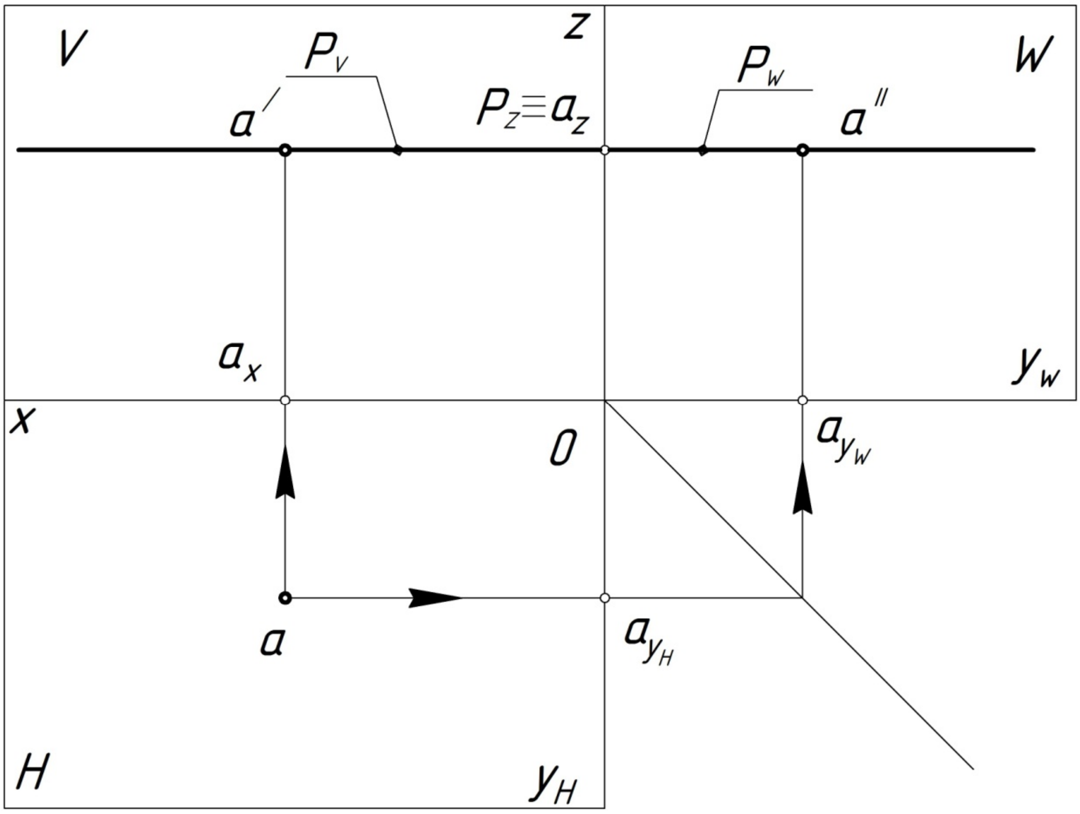


Рисунок 71 – Эпюр, горизонтальная плоскость уровня

Все объемные геометрические элементы (фигуры), основание которых лежат в горизонтальной плоскости уровня *P*, в горизонтальную плоскость проекций *H* основание проецируется в натуральную величину без искажения (рис. 72).

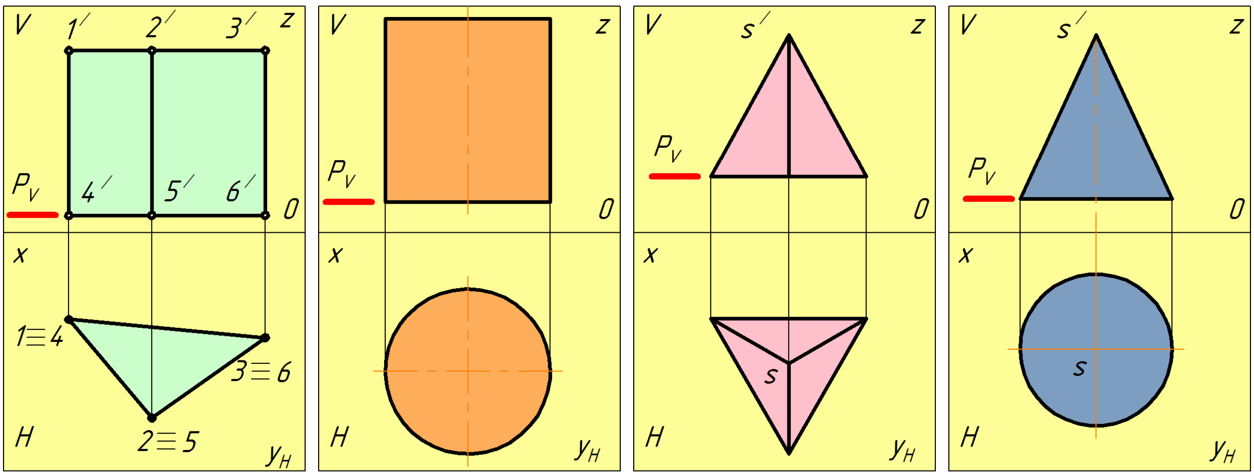


Рисунок 72 – Эпюр, изображение поверхностей

2. <u>Фронтальная плоскость уровня</u> (рис. 73, 74) – плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций.

$$P \parallel V; \qquad P \perp H; \qquad P \perp W.$$

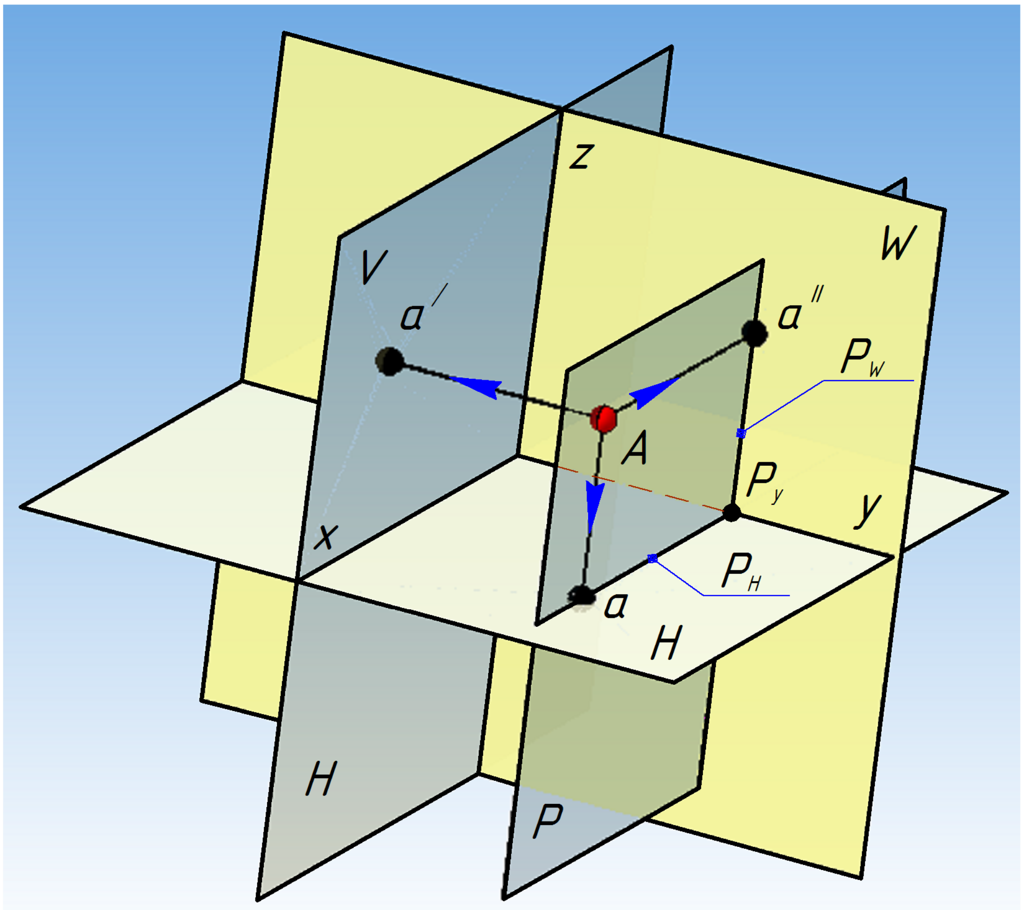


Рисунок 73 – Проецирующий аппарат, фронтальная плоскость уровня

Возьмем некоторую плоскость $P \parallel V$. Тогда $P_H \parallel x$; $P_W \perp y$; $P_W \parallel y$.

Горизонтальные проекции всех точек плоскости P принадлежат горизонтальному следу плоскости P_H.

Профильные проекции всех точек плоскости P принадлежат профильному следу плоскости P_W.

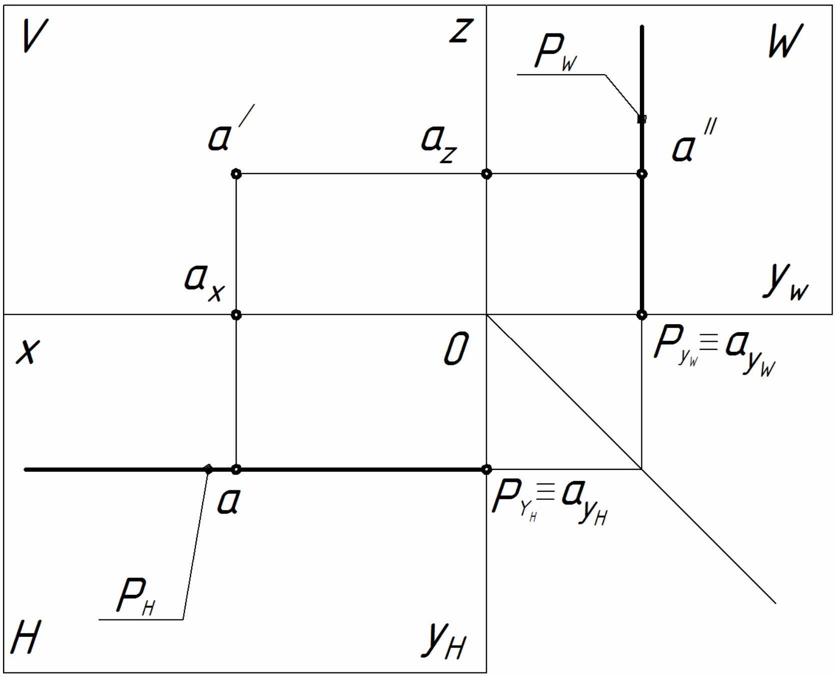


Рисунок 74 – Эпюр, фронтальная плоскость уровня

Все плоские геометрические образы (фигуры), лежащие фронтальной плоскости уровня, проецируются на фронтальную плоскость проекций в натуральную величину без искажения, а точки принадлежащие плоскости уровня на горизонтальную плоскость проекций проецируются на горизонтальный след плоскости P_H (рис. 75).

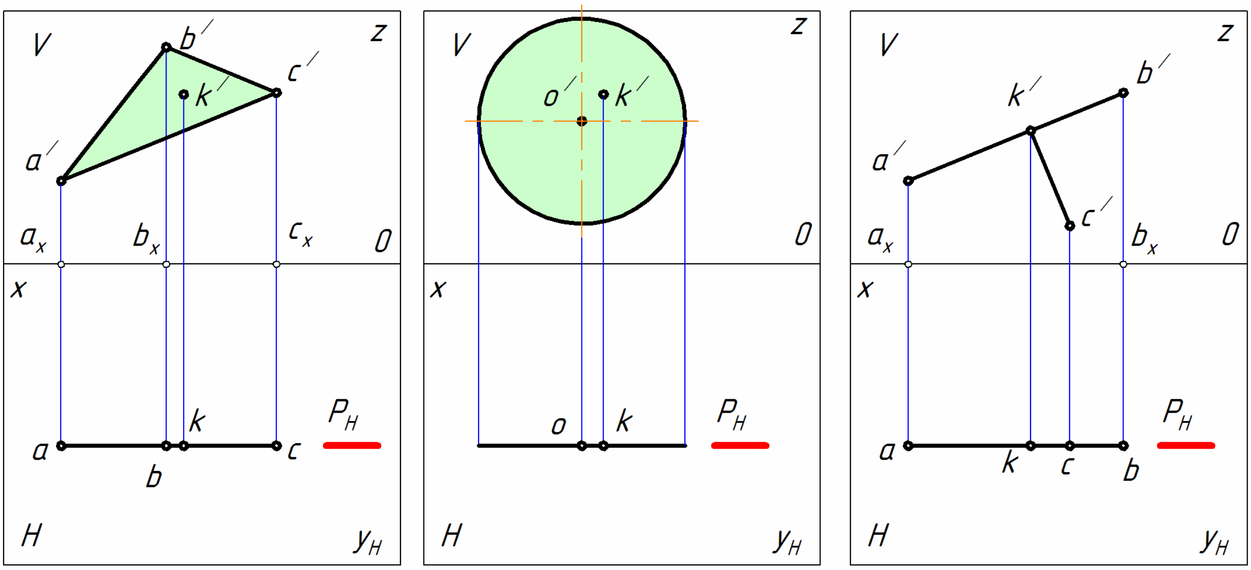


Рисунок 75 – Плоскости уровня, заданные плоскими фигурами

3. <u>Профильная плоскость уровня</u> (рис. 76) – плоскость, параллельная профильной плоскости проекций (рис. 77).

$$P \parallel W; \qquad P \perp H; \qquad P \perp V.$$

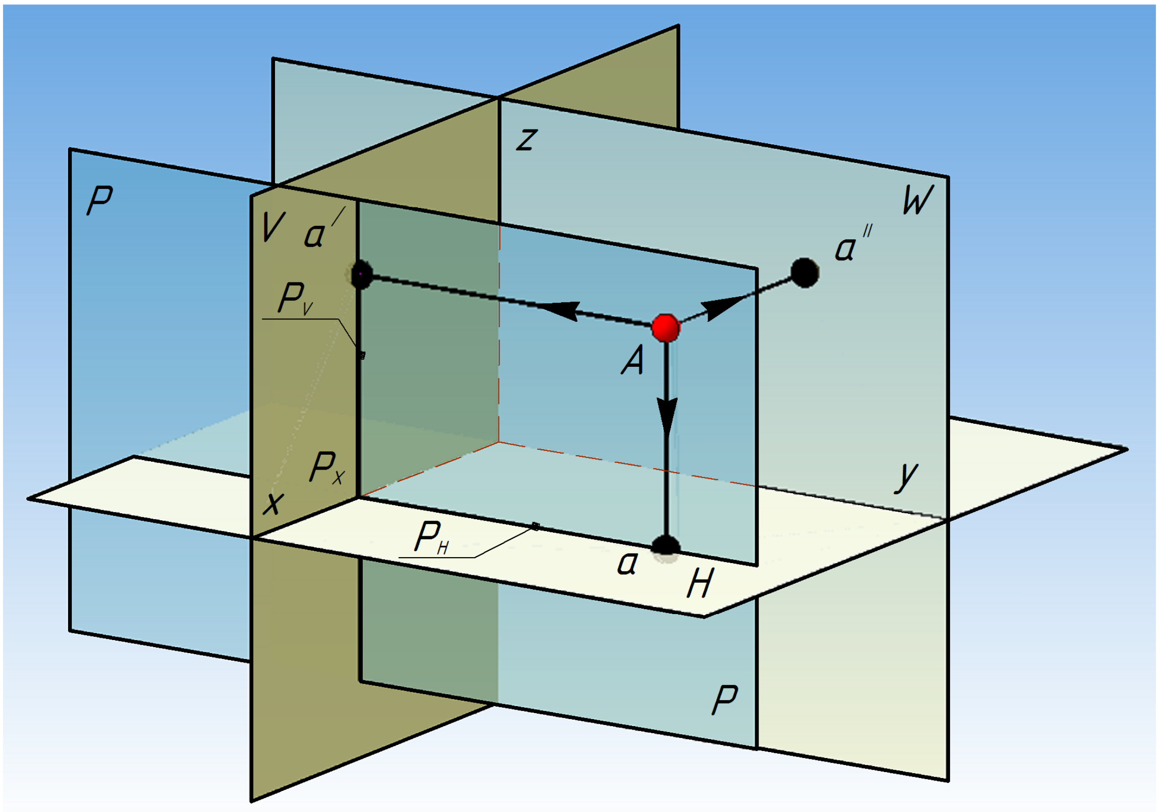


Рисунок 76 – Проецирующий аппарат, профильная плоскость уровня

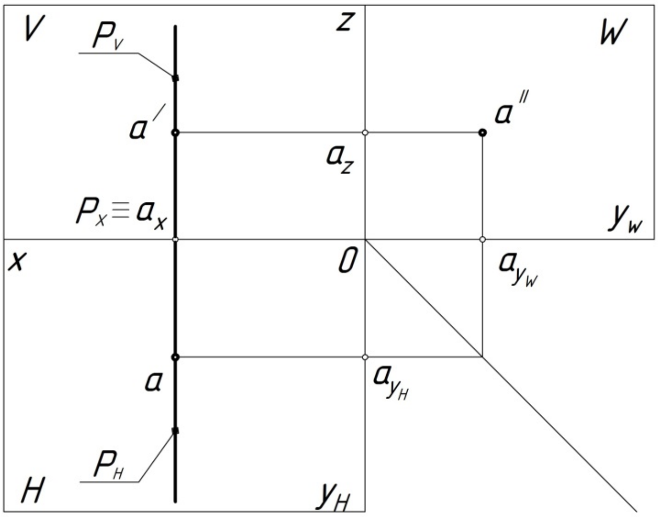


Рисунок 77 – Эпюр, профильная плоскость уровня

Возьмем некоторую плоскость $P \parallel W$. Тогда $P_V \parallel z$, $P_H \parallel y$.

Фронтальные проекции всех точек плоскости P принадлежат фронтальному следу плоскости P_V.

Горизонтальные проекции всех точек плоскости P принадлежат горизонтальному следу плоскости P_H.

4.3 Принадлежность точки плоскости, принадлежность прямой плоскости

1. Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит любой прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 78, 79, 80).
2. Прямая принадлежит плоскости, если она принадлежит хотя бы двум точкам плоскости (рис. 81, 82, 83).
3. Прямая принадлежит плоскости, если следы прямой лежат на одноименных следах плоскости (рис. 84).

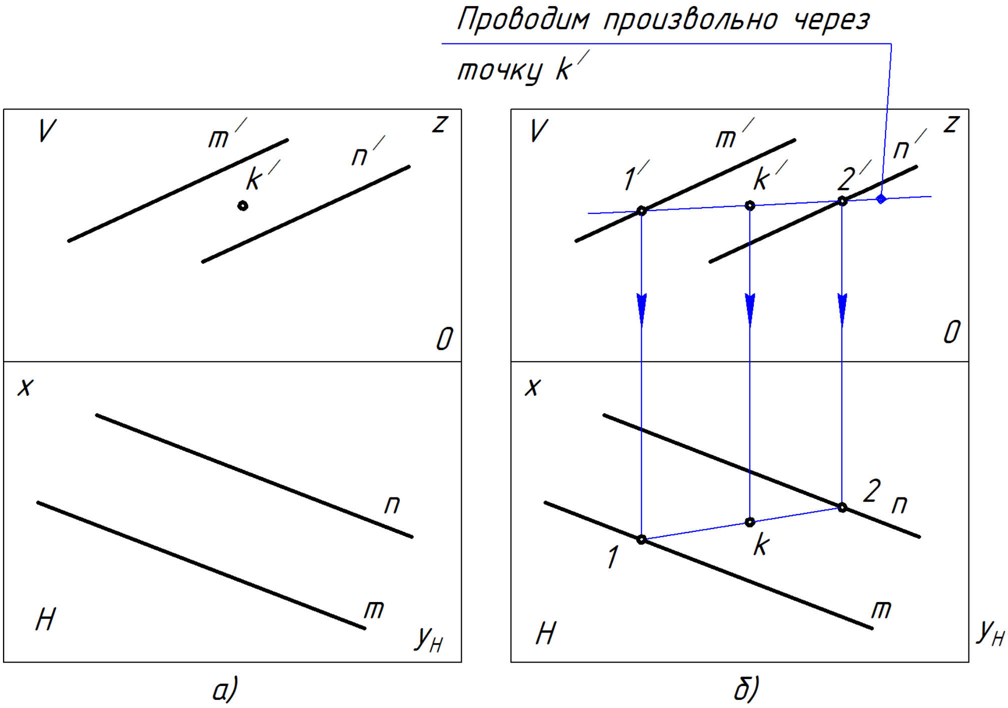


Рисунок 78 – Эпюр, принадлежность точки плоскости

Задача: плоскость задана двумя параллельными прямыми *MN*. *M*||*N*.

Известно: $(\cdot)\ K \in \{M \parallel N\}$; дана фронтальная проекция точки *K* (рис. 78, *а*).

Достроить недостающую проекцию $(\cdot)\ K$.

Решение. Через профильную проекцию $(\cdot)\ K$ (рис. 78, *б*) проводим произвольно прямую и на прямой *MN* ставим точки *1'* и *2'*. Проводим линии связи и находим горизонтальные проекции точек *1* и *2*. Таким образом, проведена прямая, принадлежащая заданной плоскости. На основании взаимного положения прямой и точки, заданную фронтальную проекцию $(\cdot)\ K$ опускаем по линии связи на горизонтальную проекцию прямой *12* .

Пример: задана плоскость Δ*ABC,* известна горизонтальная проекция точки *K* (рис.79, *а*). Требуется достроить фронтальную проекцию точки *K*.

Решаем по аналогии первой задачи, когда задана горизонтальная проекция $(\cdot)\ K$ (рис. 79, *б*).

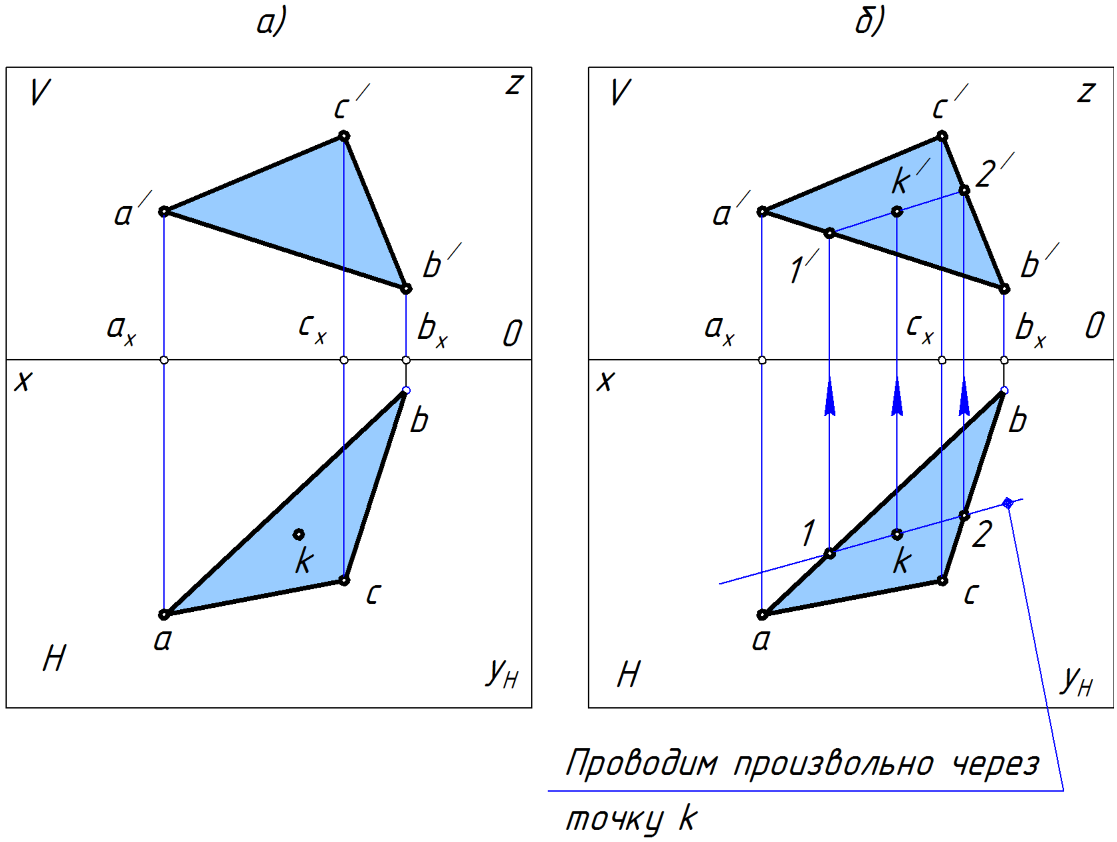


Рисунок 79 – Эпюр, принадлежность точки плоскости

Пример: задана плоскость *P* следами, известна фронтальная проекция точки *K*. Точка *K* принадлежит плоскости *P* (рис. 80, *а*).

Во фронтальной плоскости через точку $k^{/}$ произвольно проводим фронтальную проекцию прямой (рис. 80, *б*). Находим фронтальный след проведенной прямой. Для этого фронтальную проекцию прямой ведем до пересечения с фронтальным следом плоскости P_V и на пересечении проекций ставим $(\cdot)V \equiv v^{/}$, а горизонтальная проекция фронтального следа всегда лежит на оси *x* и ставим $(\cdot)v$. Пересечение фронтальной проекции прямой с осью *x* дает нам фронтальную проекцию горизонтального следа прямой $(\cdot)h^{/}$, далее по линии связи находим горизонтальный след прямой $(\cdot)H \equiv h$. Соединив горизонтальную проекцию горизонтального следа $(\cdot)h$ с горизонтальной проекцией фронтального следа $(\cdot)v$, получим горизонтальную проекцию прямой. Согласно правилу, находим недостающую горизонтальную проекцию $(\cdot)$ K.

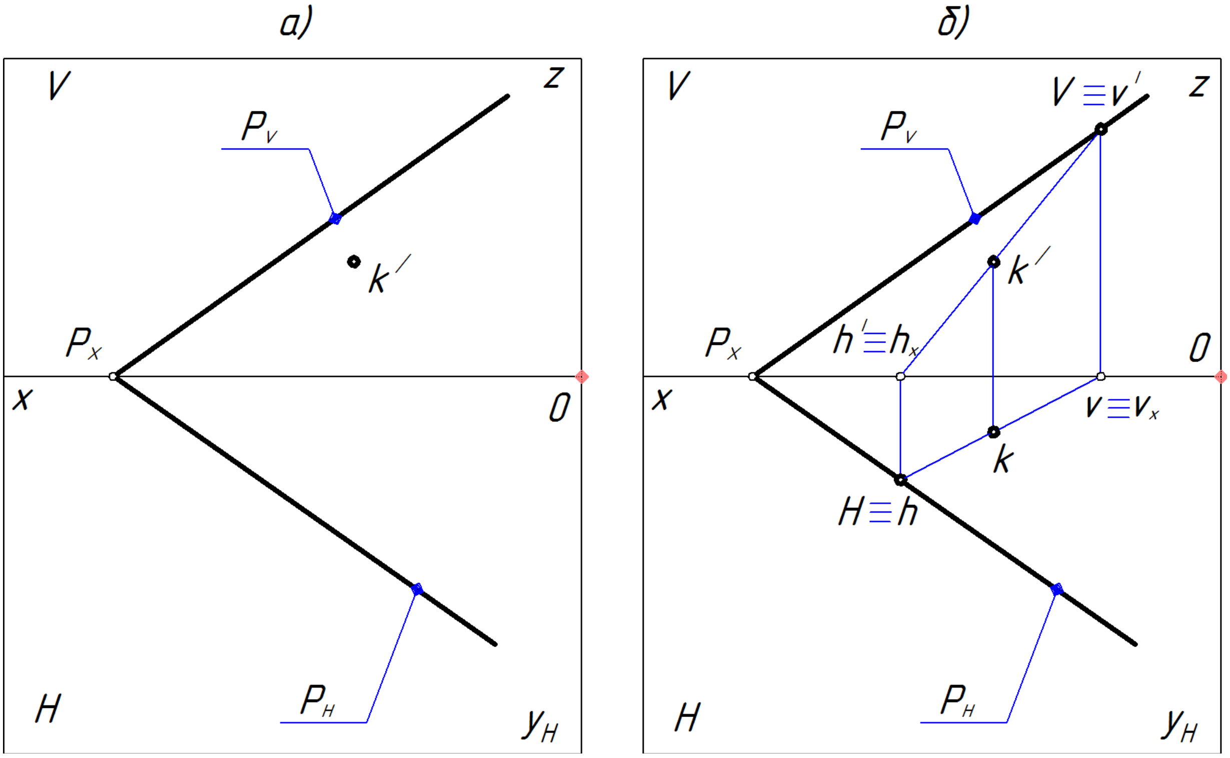


Рисунок 80 – Эпюр, принадлежность точки плоскости

4.4 Главные линии плоскости

4.4.1 Прямые уровня плоскости – это прямые лежащие в плоскости и параллельные плоскости проекций:

- горизонтальная прямая плоскости;
- фронтальная прямая плоскости;
- профильная прямая плоскости.

Профильную прямую плоскости мы не рассматриваем.

1. Горизонтальная прямая плоскости (горизонталь плоскости)

Горизонталью плоскости называют прямую, лежащую в заданной плоскости и параллельную горизонтальной плоскости проекций *H* (рис. 81, 82).

$$AB \in P; \quad AB \parallel H; \quad AB \parallel ab; \quad ab \parallel P_H; \quad a'b' \parallel x.$$

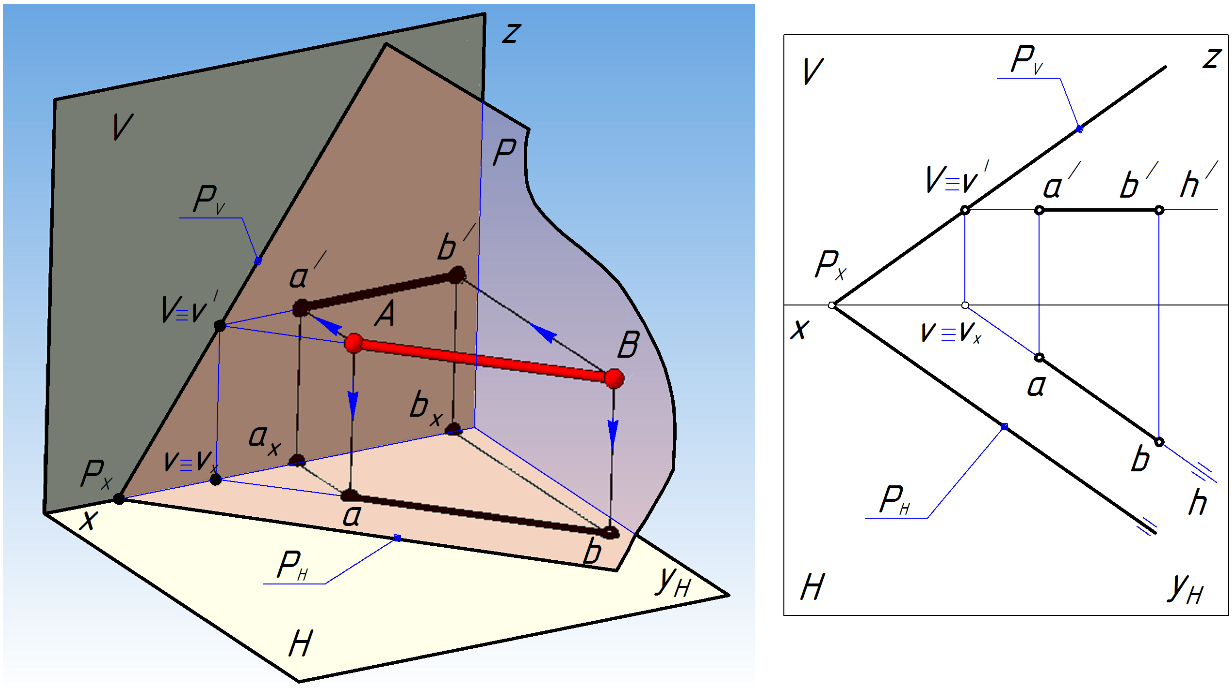


Рисунок 81 – Проецирующий аппарат и эпюр горизонтальной прямой плоскости

а) б)

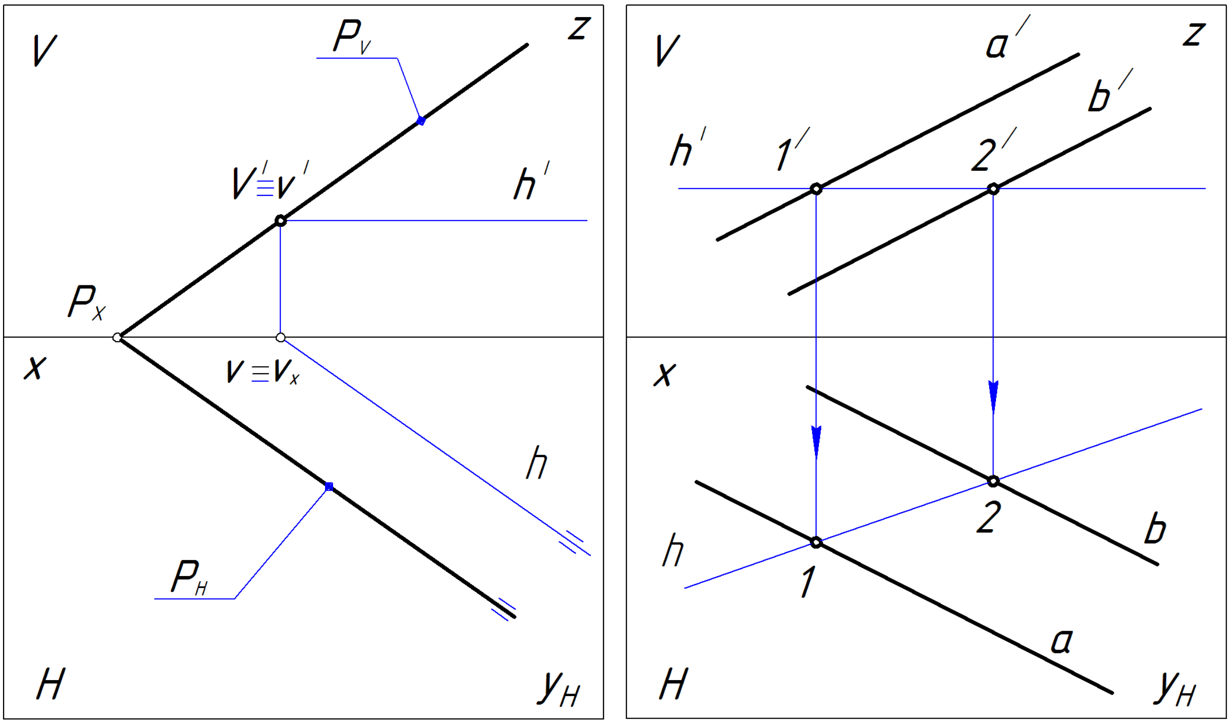


Рисунок 82 – Эпюр горизонтальной прямой плоскости

Фронтальная проекция h' горизонтали плоскости <u>всегда</u> параллельна оси x.

Горизонтальная проекция h горизонтали параллельна горизонтальному следу плоскости P_H.

На рисунке 82, *а* показана плоскость, заданная следами.

$$h' \parallel x; \qquad h \parallel P_H; \qquad h \in P.$$

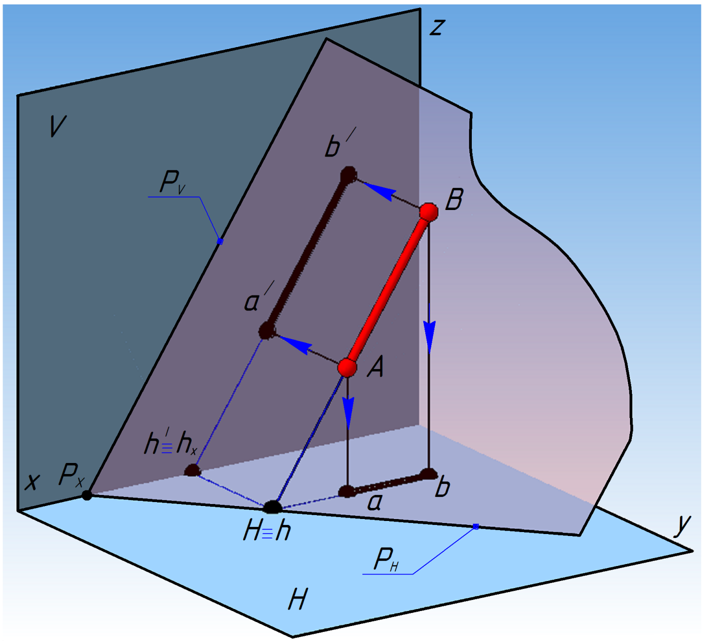
На рисунке 82, *б* показана плоскость, заданная двумя параллельными прямыми *A* и *B*.

$$1^{/}2^{/} \parallel x; \qquad 12 \nparallel x; \qquad 12 \in \{A \parallel B\}.$$

2. Фронтальная прямая плоскости (фронталь плоскости)

Фронталью плоскости называют прямую, лежащую в заданной плоскости и параллельную фронтальной плоскости проекций *V* (рис. 83).

$$AB \in P; \quad AB \parallel V; \quad AB \parallel ab; \quad ab \parallel x; \quad a^{/}b^{/} \parallel P_V.$$



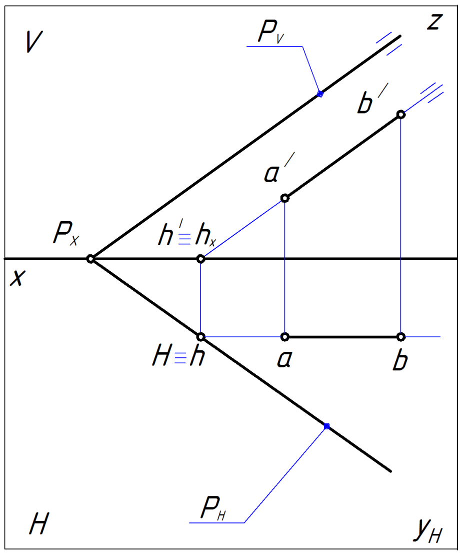


Рисунок 83 – Проецирующий аппарат и эпюр фронтальной прямой плоскости

Горизонтальная проекция фронтали плоскости <u>всегда</u> параллельна оси *x*, а фронтальная проекция фронтали параллельна фронтальному следу плоскости P_V.

Задача: через точку *A* провести фронталь плоскости (рис. 84).

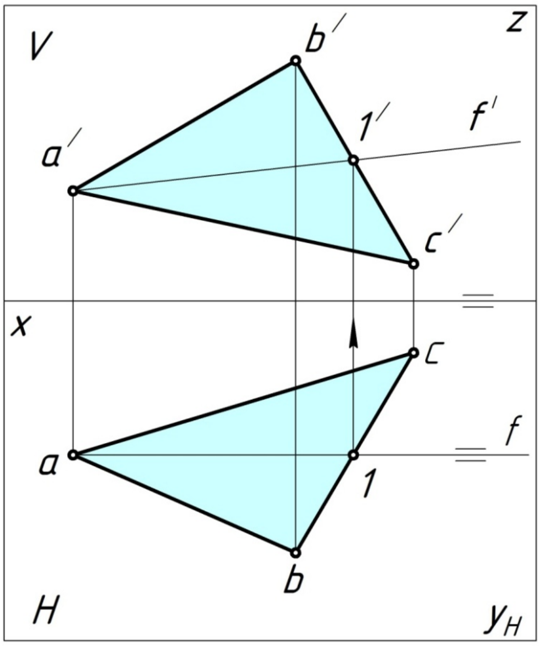


Рисунок 84 – Эпюр, фронталь плоскости

Решение. Для построения фронтальной проекции фронтали ставим (·)1 на пересечении с отрезком *bc*, $f \parallel x$, по линии связи находим фронтальную проекцию (·)$1^{/}$. Для построения фронтальной проекции фронтали соединяем одноименные проекции точек в плоскости *V*, $a^{/}1^{/}$ – получаем фронтальную проекцию $f^{/}$ фронтали плоскости.

4.4.2 Линии наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций

Линии наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций называют прямую линию, лежащую в плоскости, и составляющую с плоскостью проекций угол наклона, который определяет угол наклона всей плоскости к плоскости проекций.

– Линии наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций.

– Линии наибольшего наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций.

– Линии наибольшего наклона плоскости к профильной плоскости проекций.

I. Линии наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций (линии ската)

Линия наклона (ската) плоскости к горизонтальной плоскости проекций всегда перпендикулярна горизонтальному следу плоскости или горизонталям плоскости (рис. 85, 86).

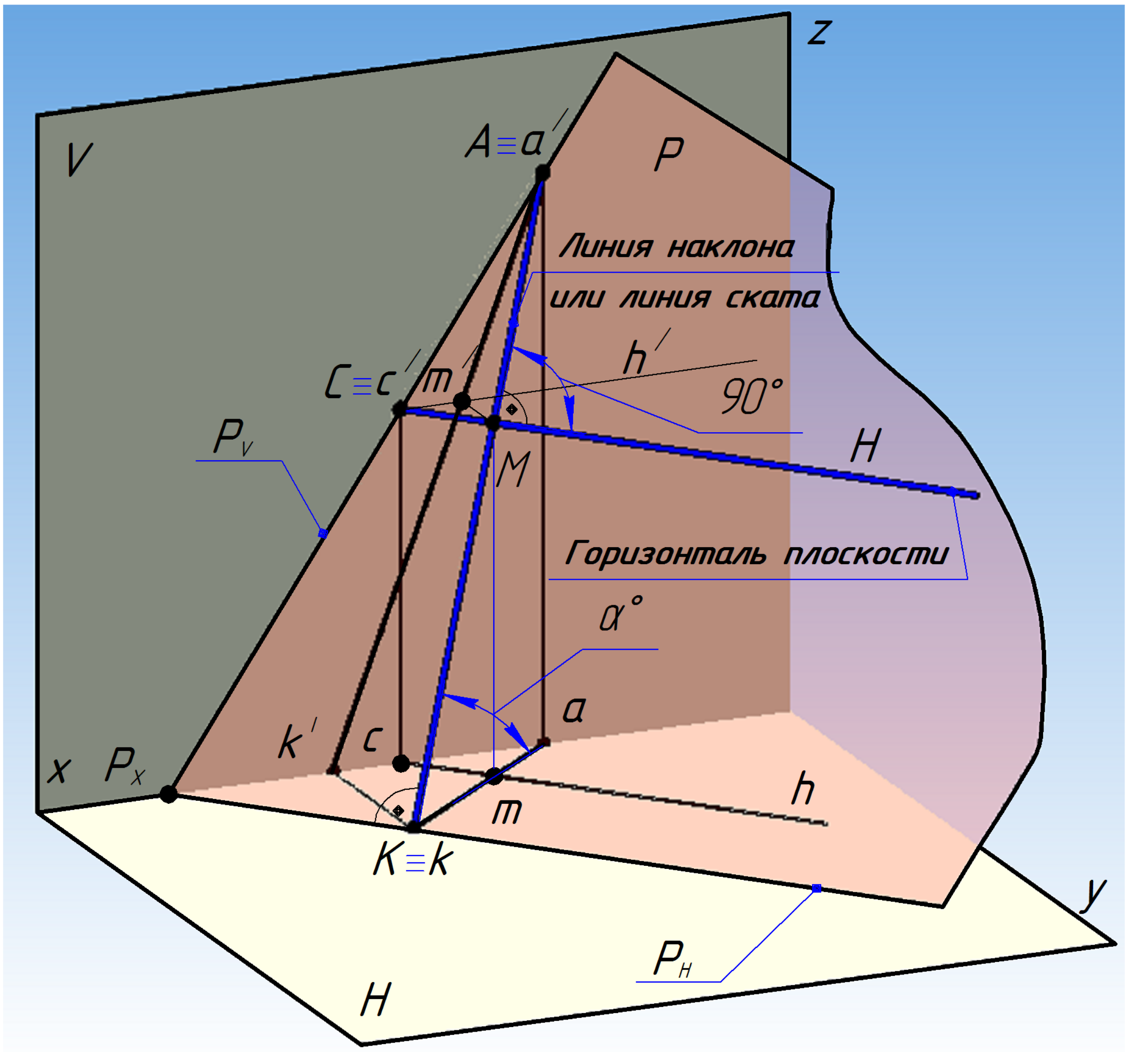


Рисунок 85 – Проецирующий аппарат, линия наклона к горизонтальной плоскости проекций

$AK \in P$; $AK \perp P_H$; $ak \perp P_H$.

Определить угол наклона плоскости *P* (общего положения) к горизонтальной плоскости проекций *H*.

Возьмем произвольно $(\cdot)A$ на фронтальном следе плоскости P_V. От точки проведем линию ската перпендикулярно горизонтальному следу плоскости P_H или горизонтали плоскости "*H*".

$AK \in P$, т. к. принадлежит следам плоскости *P*.

Если точка принадлежит какой-либо плоскости проекций (*V, H*), то одна из проекций точки совпадет с самой точкой, а другая проекция точки будет лежать на оси *x*.

Пусть точка $A \in V$, а точка $K \in H$.

Находим проекции точек *A* и *K* на плоскостях проекций (рис. 86). Соединив одноименные проекции точек проекций A и K, получаем две проекции линии ската. Используя метод прямоугольного треугольника, рассмотренный в теме 3, определяем углы наибольшего наклона к плоскостям проекций, а также натуральную величину отрезка (*AK*).

$\angle\alpha°$ – угол наклона плоскости *P* к горизонтальной плоскости проекций *H*.

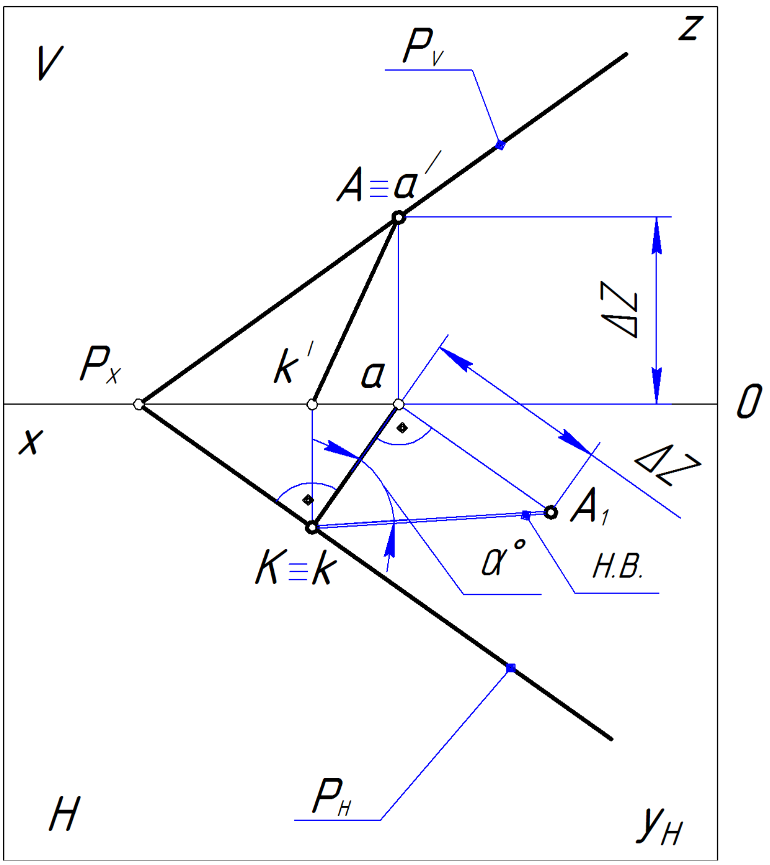


Рисунок 86 – Эпюр, линия наклона к горизонтальной плоскости проекций

В пространстве рассмотрим прямоугольный треугольник ΔAKa (рис. 87), являющийся горизонтально проецирующей плоскостью $\Delta AKa \perp H$.

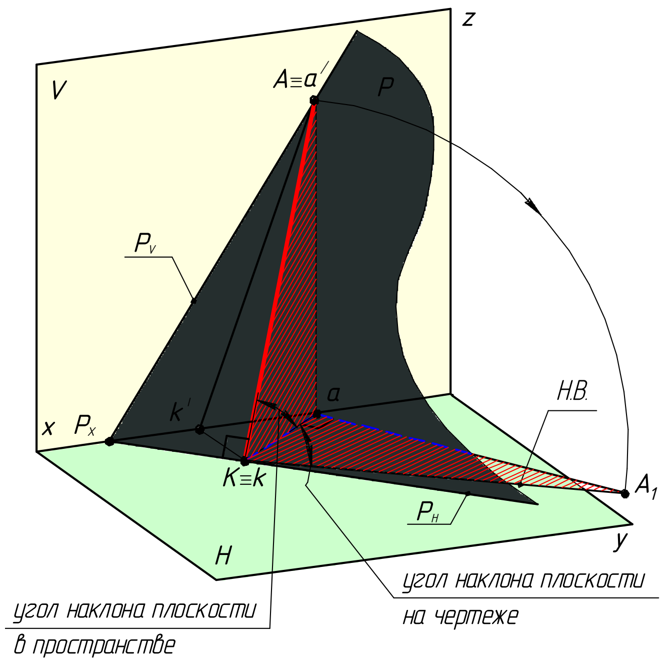


Рисунок 87 – Проецирующий аппарат, определение натуральной величины линии наклона к горизонтальной плоскости проекций

Поворачиваем ΔAKa вокруг катета Ka до совмещения с горизонтальной плоскостью проекций H. Гипотенуза KA_1 дает натуральную величину в новом положении и является отрезком линией наибольшего ската, а угол между построенной натуральной величиной (линией ската) и ее горизонтальной проекцией, является углом наклона плоскости *P* к плоскости проекций *H*.

Определить угол наклона плоскости ΔABC к горизонтальной плоскости проекций (рис. 88, *а*).

Для удобства через $(\cdot)A$ проводим горизонталь плоскости (рис. 88, *а*). Мы знаем, что горизонталь плоскости <u>всегда</u> параллельна горизонтальной плоскости проекций и поэтому $h^{/}$ – фронтальная проекция горизонтали плоскости пройдет всегда параллельно оси *x*.

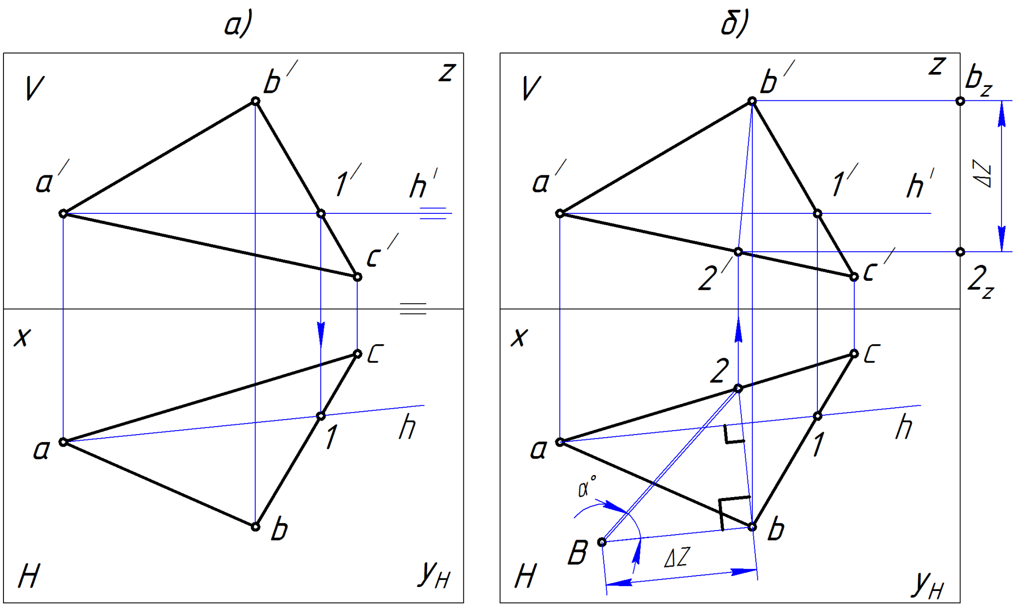


Рисунок 88 – Эпюр, построение линии ската, определение натуральной величины отрезка прямой

Определяем горизонтальную проекцию горизонтали плоскости – h. Используем правило: прямая принадлежит плоскости, если у прямой и плоскости есть две общие точки. В нашем примере горизонталь (прямая) принадлежит точкам *A* и *1* в пространстве на эпюре $h' \in a'1'$. Найдем проекции точек *A* и *1*, опустив линии связи от фронтальных проекций точек (правила построения эпюра точки и взаимного положения прямой и точки, рис 88, *а*).

Исходя из правила (линия ската (наклона) плоскости к горизонтальной плоскости проекций всегда перпендикулярна горизонтали плоскости) восстанавливаем перпендикуляр к горизонтальной проекции горизонтали, рис. 88, *б*. Для удобства возьмем горизонтальную проекцию (·)*B* и восстановим перпендикуляр к горизонтальной проекции горизонтали, согласно правилу. Затем находим фронтальную проекцию отрезка *B2*, который является линией наибольшего ската. Согласно найденным двум проекциям линии наибольшего ската плоскости *B2*, находим ее натуральную величину и угол наклона к горизонтальной плоскости проекций – методом прямоугольного треугольника.

II. Линии наибольшего наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций

Линия наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций всегда перпендикулярна фронтальному следу плоскости или к фронталям плоскости (рис. 89).

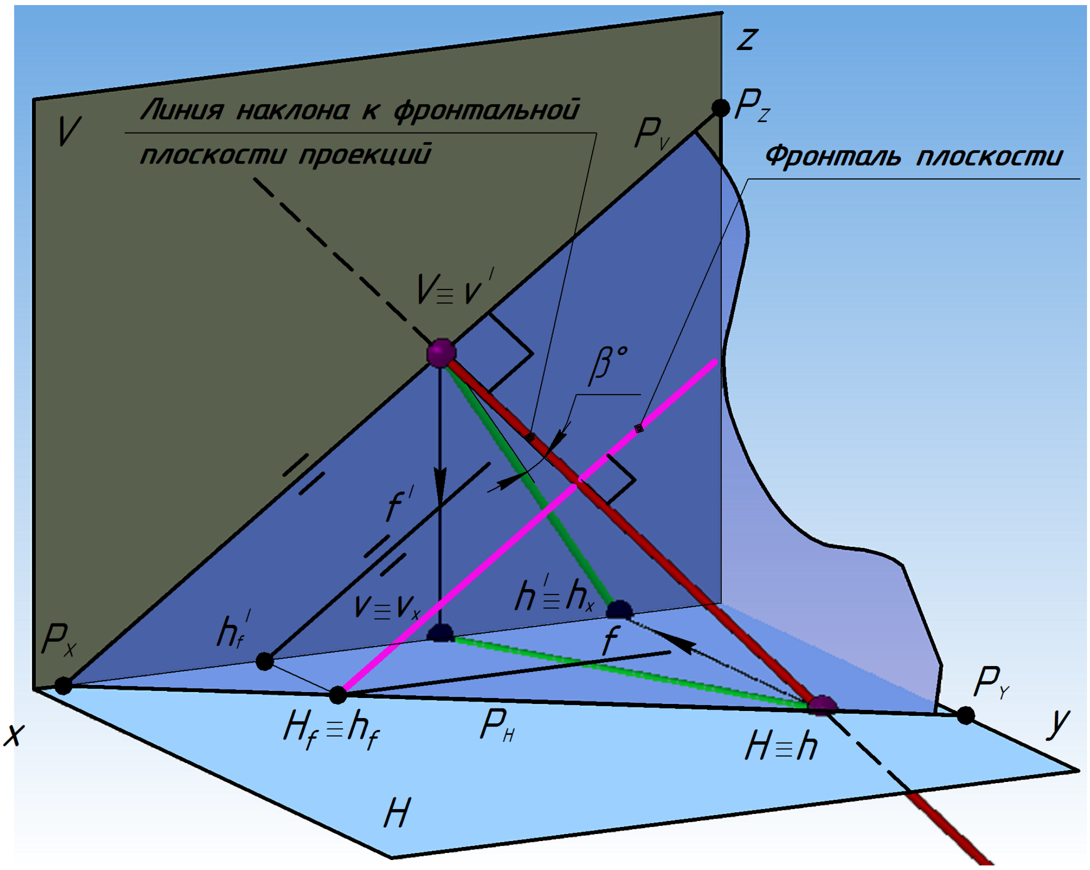


Рисунок 89 – Проецирующий аппарат, линия наклона к фронтальной плоскости проекций *V*

$\angle\beta°$ – угол наклона плоскости *P* к фронтальной плоскости проекций *V*.

Аналогично рис. 87 определяем угол наклона плоскости *P* к плоскости *V*. В связи с тем, что плоскость, заданная треугольником *Vh'H* (рис. 90) поворачивается вокруг оси *Vh'* до совмещения с фронтальной плоскостью проекций *V*, то гипотенуза $V'H_1$ проецируется в натуральную величину и является отрезком линией наибольшего наклона, а угол между построенной натуральной величиной и ее фронтальной проекцией является углом наибольшего наклона плоскости *P* к фронтальной плоскости проекций *V*.

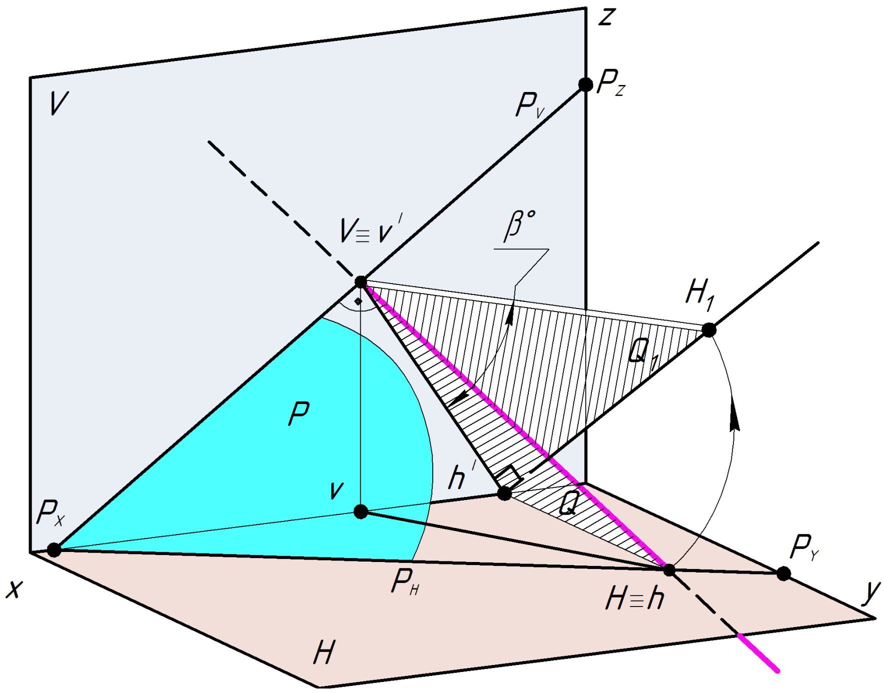


Рисунок 90 – Проецирующий аппарат, линия наклона к фронтальной плоскости проекций *V* (вращение плоскости *Q* до совмещения с плоскость *V*)

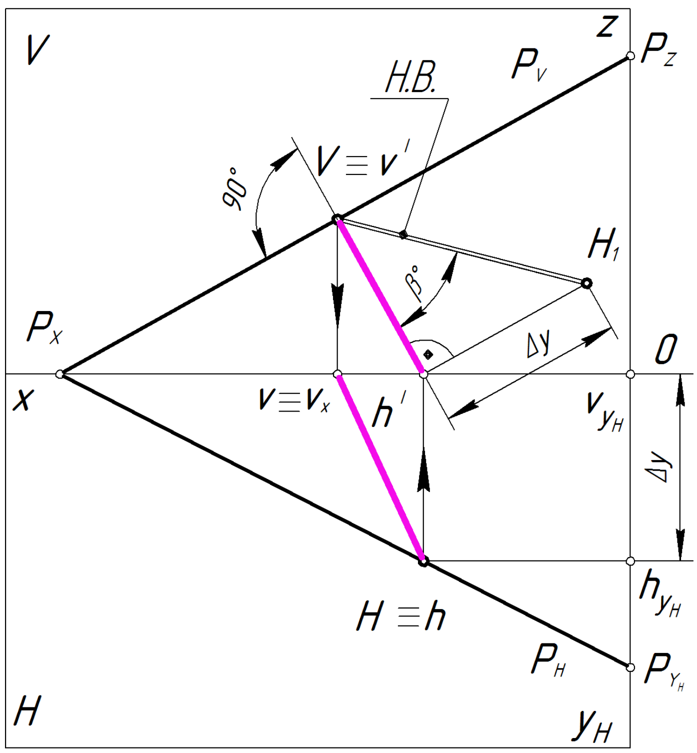


Рисунок 91 – Эпюр, линия наклона к горизонтальной плоскости проекций

Определить угол наклона плоскости ΔABC к плоскости *V* (рис. 92). Решение аналогично, рис. 88.

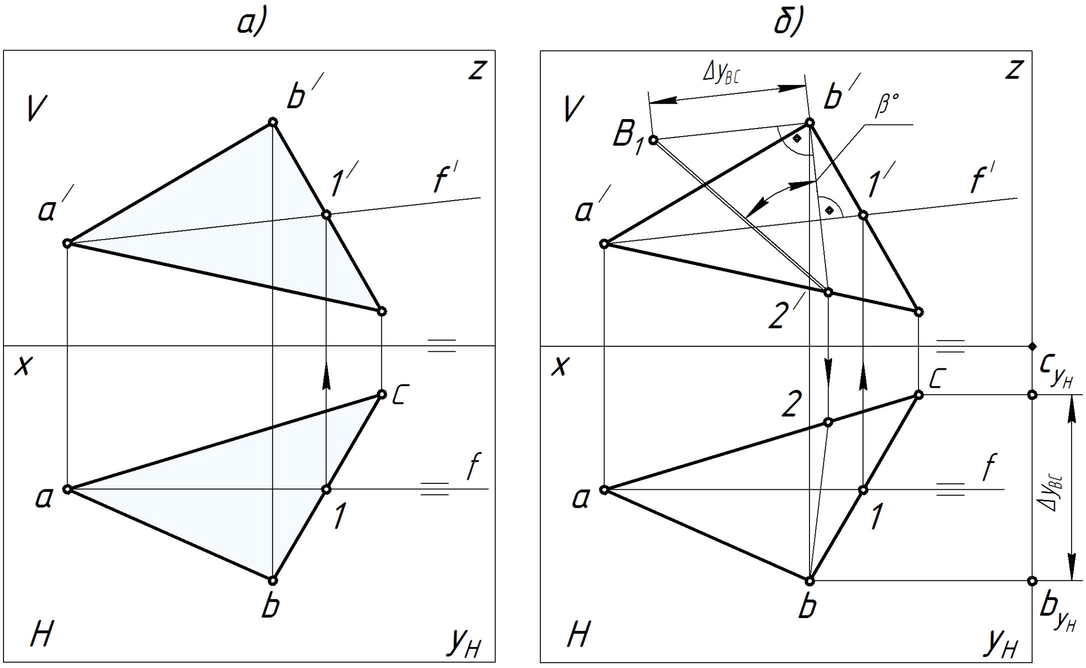


Рисунок 92 – Эпюр, построение линии наклона плоскости ΔABC, определение натуральной величины отрезка прямой: $2'B_1$ – натуральная величина линии наклона плоскости; f' – фронтальная проекция фронтали плоскости; *f* – горизонтальная проекция фронтали плоскости; $\angle\beta°$ – угол наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций *V*

4.5 Определение общих элементов прямой и плоскости, двух плоскостей

Общим элементом прямой и плоскости является точка пересечения прямой с плоскостью, а двух плоскостей – линия пересечения.

I. Плоскость проецирующая, а прямая общего положения (рис. 93, *а*).

$P \perp V$; $AB \cap P = K$ – рис. 83, *а*. $\{1 \parallel 2\} \perp H$; $AB \cap \{1 \parallel 2\} = K$ – рис. 93, *б*.

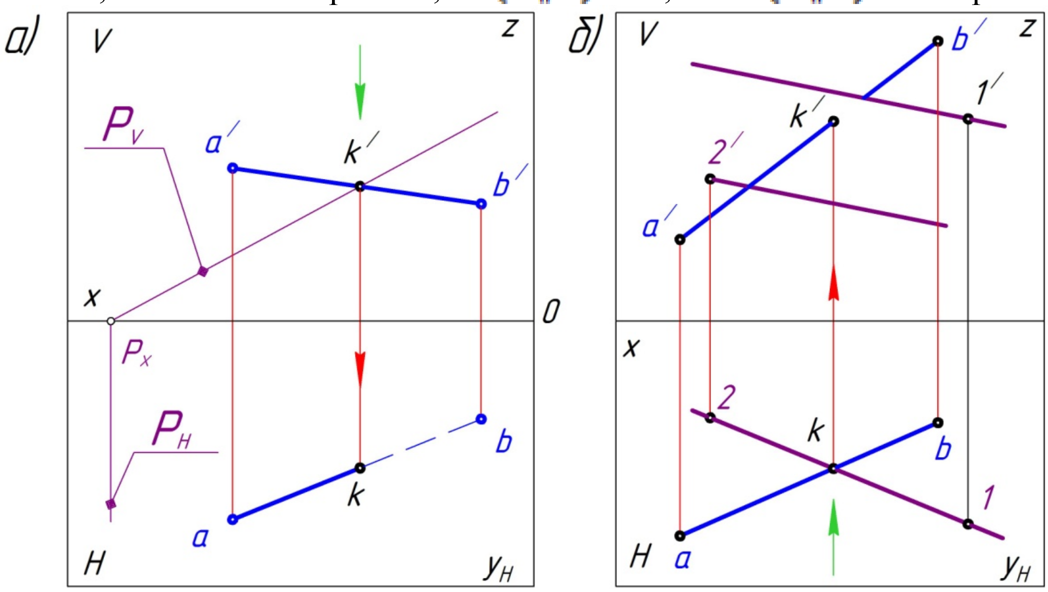


Рисунок 93 – Эпюр, пересечение прямой с плоскостью

II. Прямая проецирующая, а плоскость – общего положения (рис. 94).

$AB \perp V$ – рис. 94, *а*; $AB \perp H$ – рис. 94, *б*.

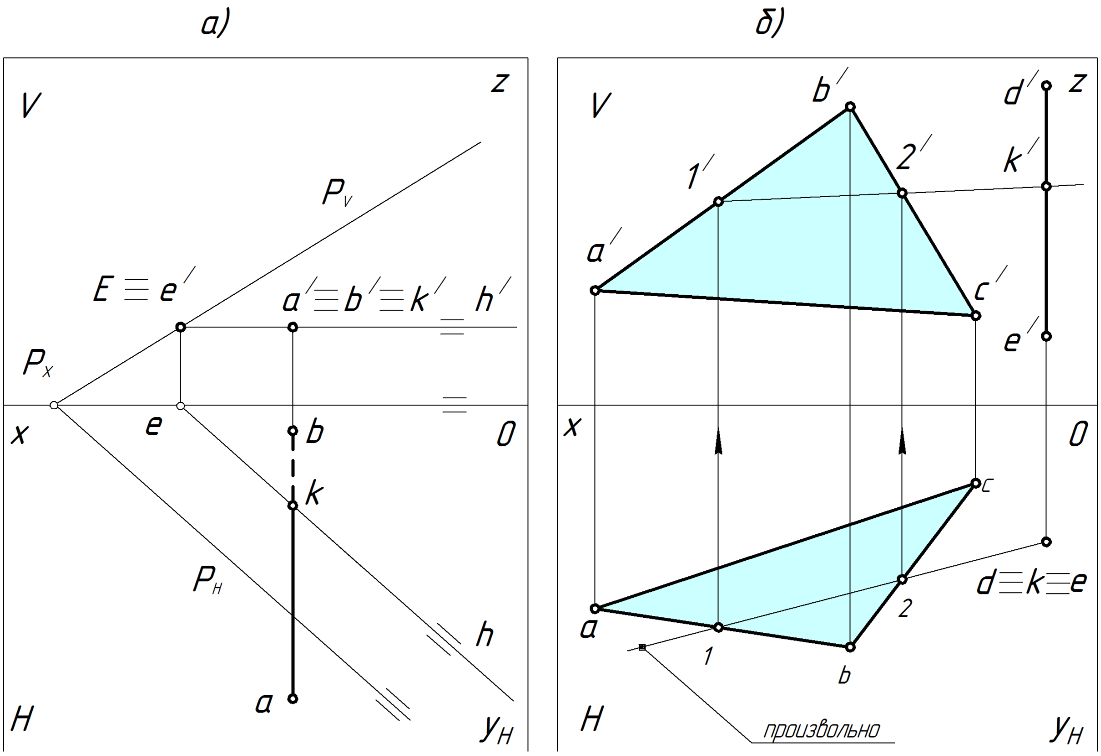


Рисунок 94 – Эпюр, пересечение прямой и плоскости

III. Две горизонтально-проецирующие плоскости пересекаются между собой (рис. 95, 96).

$P \perp H$; $\Delta ABC \perp H$; $P \cap \Delta ABC = MK$; $KM \perp H$.

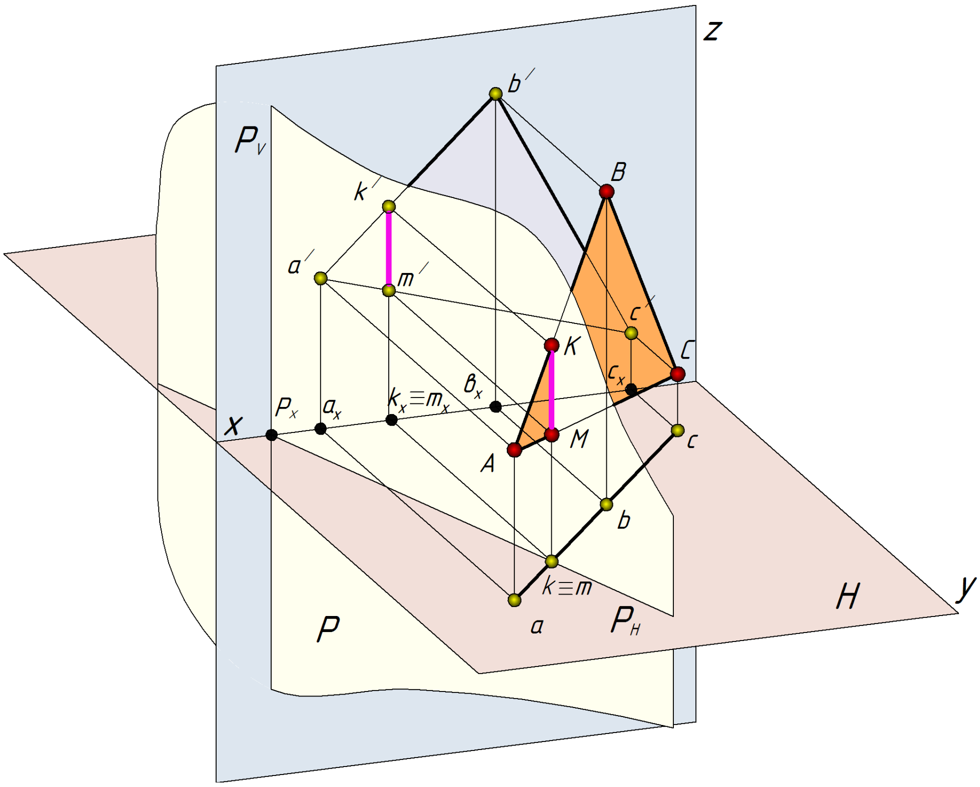


Рисунок 95 – Проецирующий аппарат, пересечение двух плоскостей

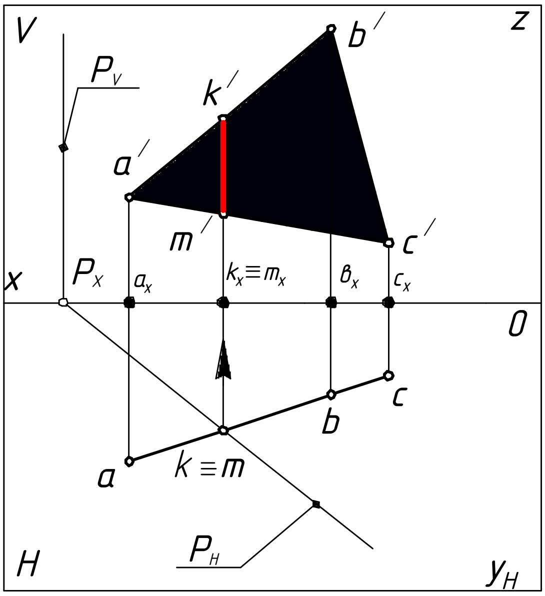


Рисунок 96 – Эпюр, пересечение двух плоскостей

Две плоскости, перпендикулярные одной плоскости проекций, пересекаются по прямой, также перпендикулярной этой же плоскости проекций.

IV. Плоскости, перпендикулярные различным плоскостям проекций (рис. 97, 98). $P \perp H$; $\Delta ABC \perp V$; $P \cap \Delta ABC = MK$.

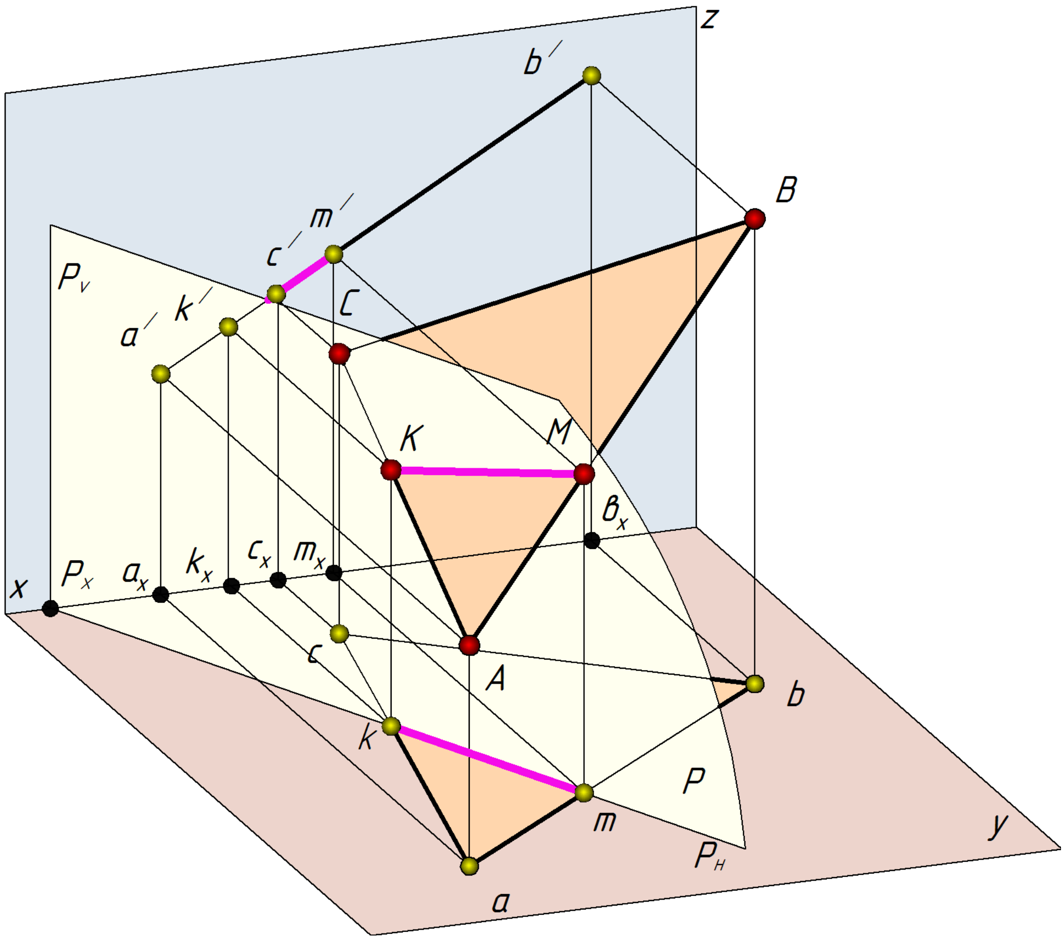


Рисунок 97 – Проецирующий аппарат, пересечение двух плоскостей

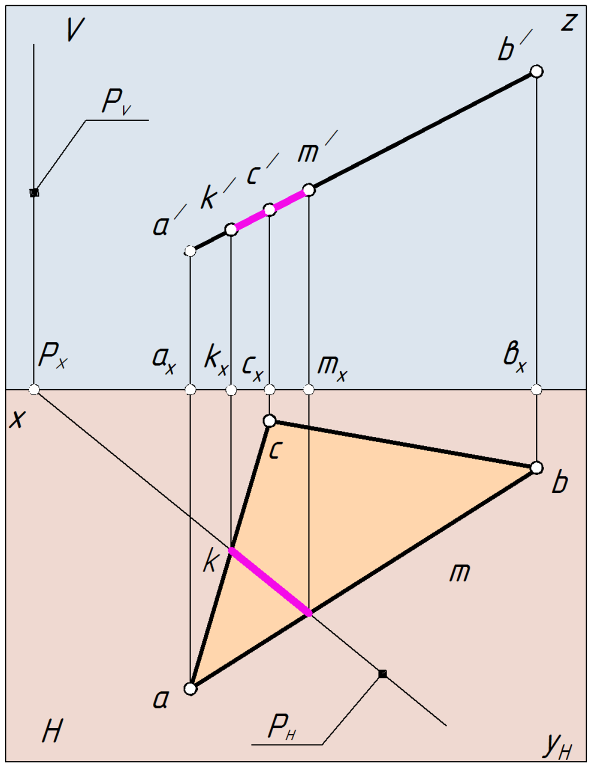


Рисунок 98 – Эпюр, пересечение двух плоскостей

V. Одна плоскость занимает проецирующее положение, а другая плоскость – общего положения, рис. 99, 100.

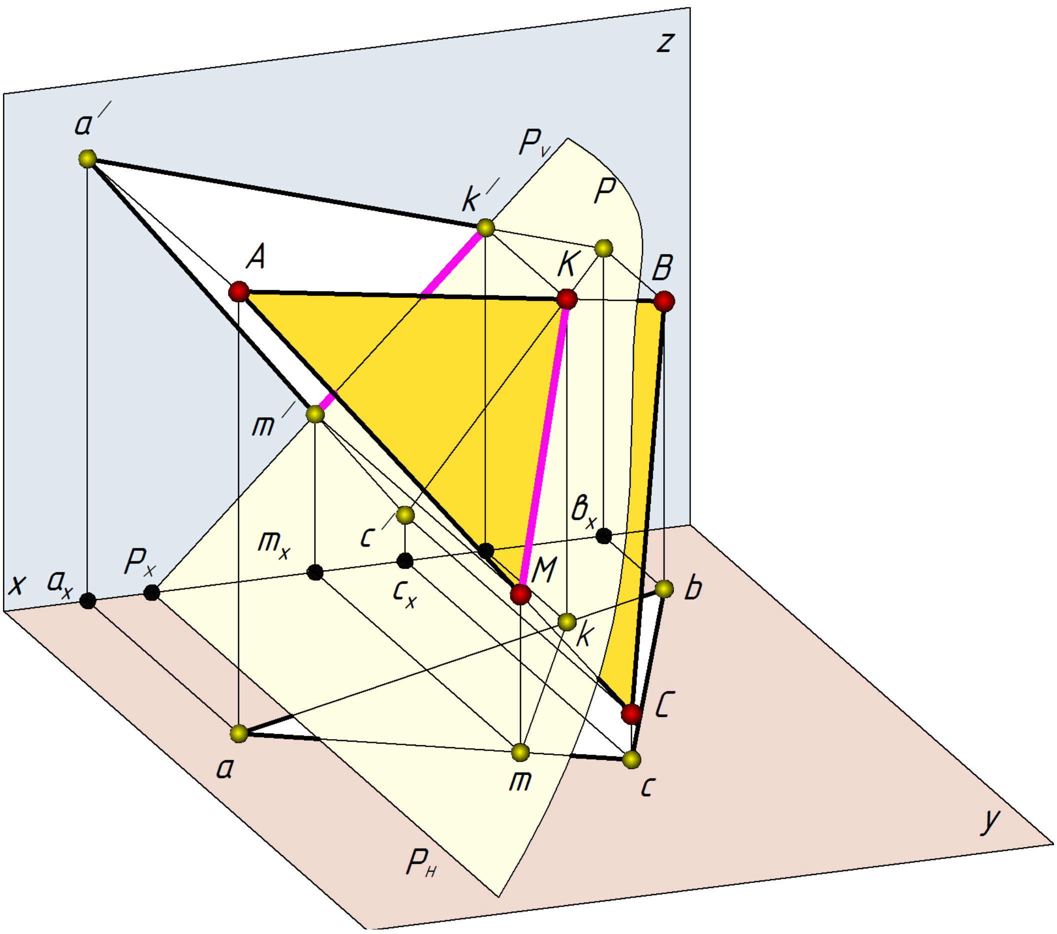


Рисунок 99 – Проецирующий аппарат, пересечение двух плоскостей

$P \perp V$; Δ ABC – плоскость общего положения.

$P \cap \Delta ABC = KM$; KM – линия пересечения плоскостей.

P – фронтально-проецирующая плоскость, плоскость имеет собирательное свойство. Все точки, лежащие в плоскости P, проецируются на фронтальный след плоскости P_V точки $m^{/}k^{/}$. Соответственно $(\cdot)K$ и $(\cdot)M \in P$, т. к. $m^{/}k^{/} \in P_V$. Построение эпюра см. на рис. 100.

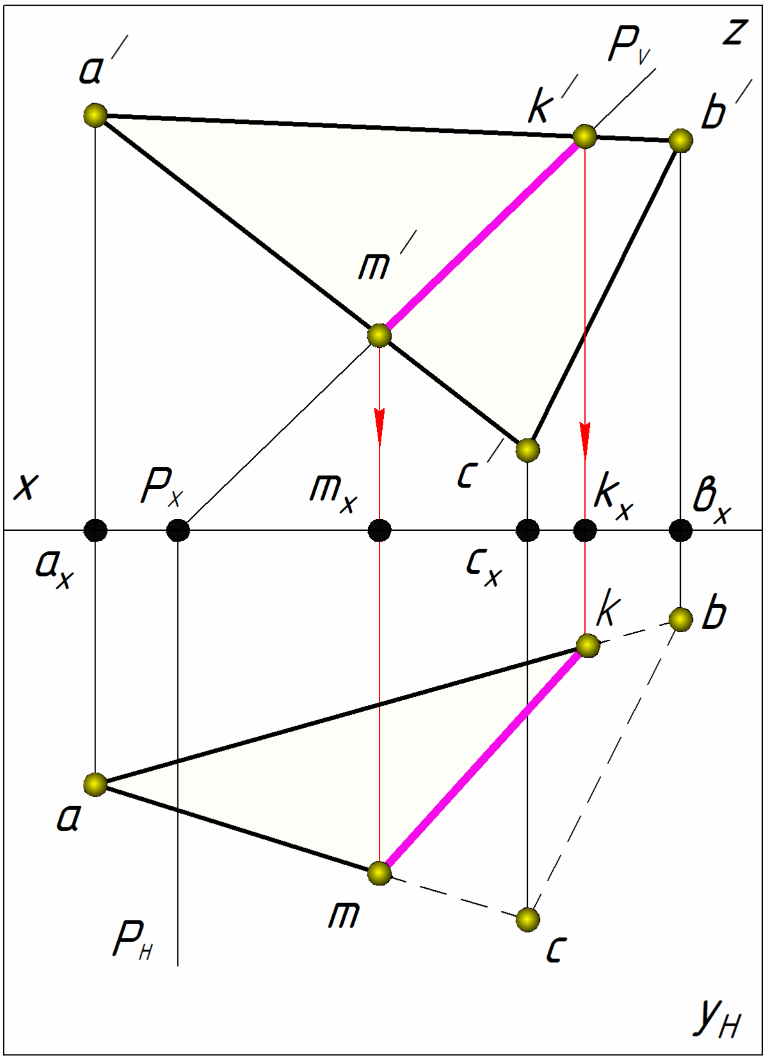


Рисунок 100 – Эпюр, пересечение двух плоскостей

VI. Пересечение двух плоскостей общего положения, заданных следами (рис. 101, 102). $Q \cap P = VH$.

V – фронтальный след линии пересечения прямой VH.

$v^{/}$ – фронтальная проекция фронтального следа прямой VH.

v – горизонтальная проекция фронтального следа прямой VH.

H – горизонтальный след линии пересечения прямой VH.

h – горизонтальная проекция горизонтального следа прямой VH.

$h^{/}$ – фронтальная проекция горизонтального следа прямой VH.

$v^{/}h^{/}$ – фронтальная проекция линии пересечения прямой VH.

vh – горизонтальная проекция линии пересечения прямой VH.

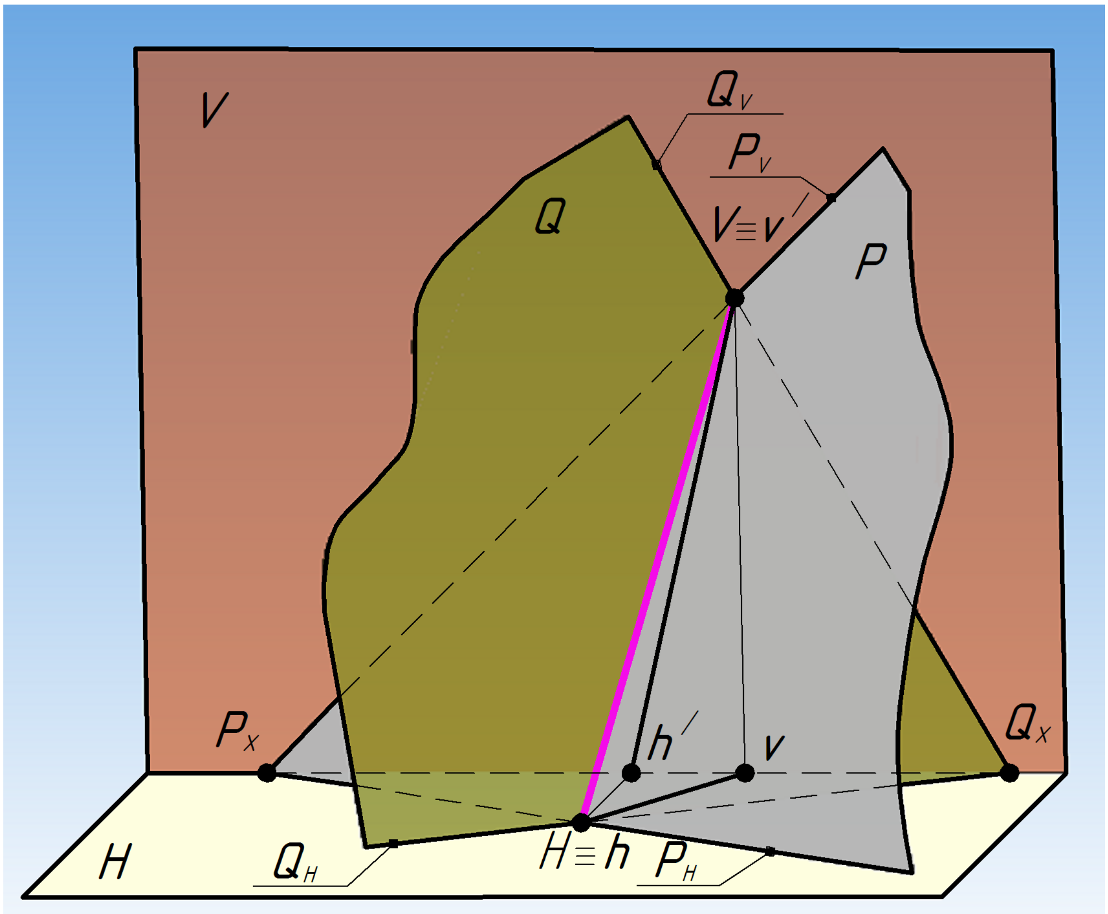


Рисунок 101 – Проецирующий аппарат, пересечение двух плоскостей

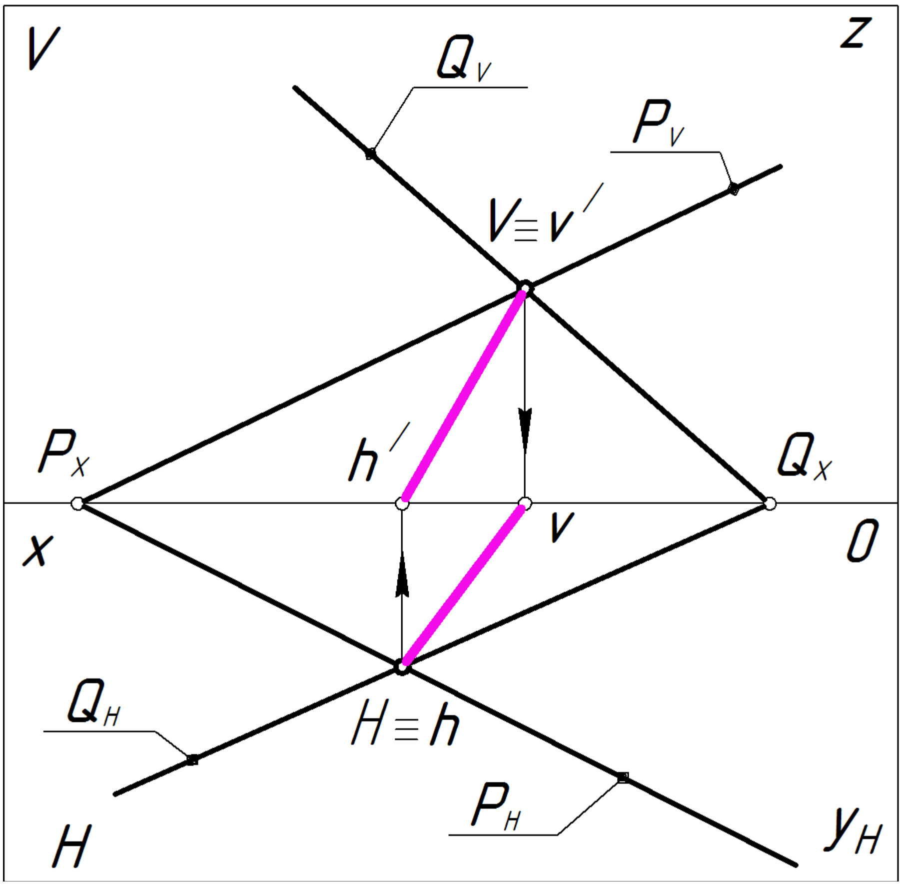


Рисунок 102 – Эпюр, пересечение двух плоскостей

VII. Одна плоскость общего положения P, другая горизонтальная плоскость уровня Q (рис. 103, 104).

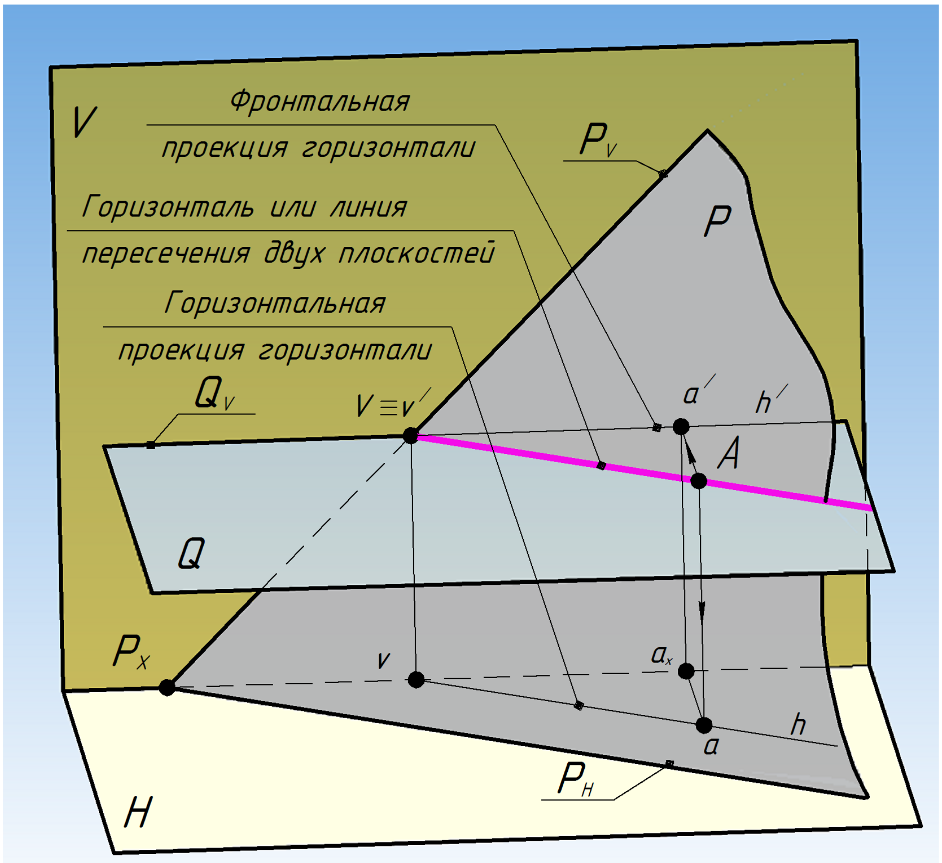


Рисунок 103 – Проецирующий аппарат, пересечение двух плоскостей

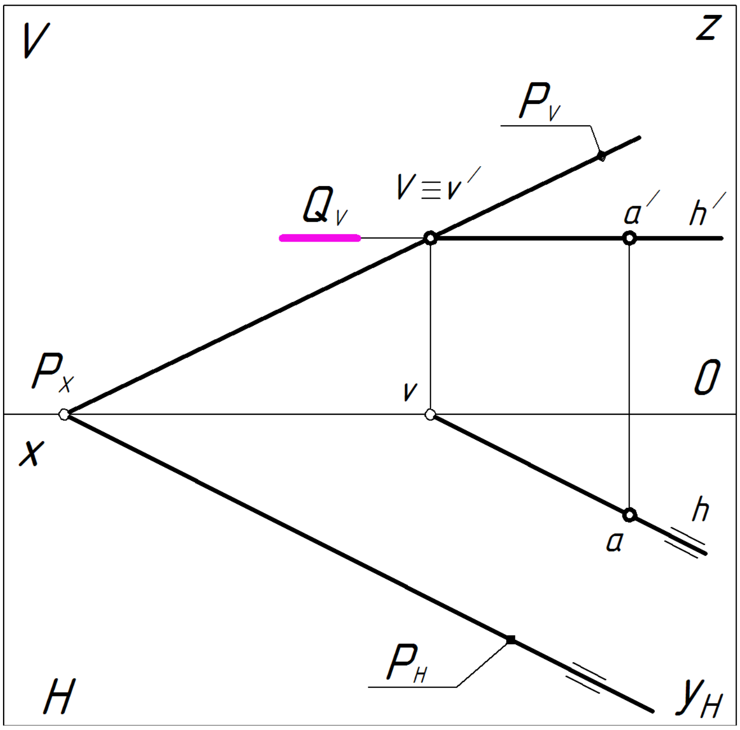


Рисунок 104 – Эпюр, пересечение двух плоскостей

VIII. Одни пары следов пересекаются, а другие пары следов параллельны между собой (рис. 105).

Линией пересечения является горизонталь – $h \,||\, P_H \,||\, Q_H$; $h' \,||\, x$.

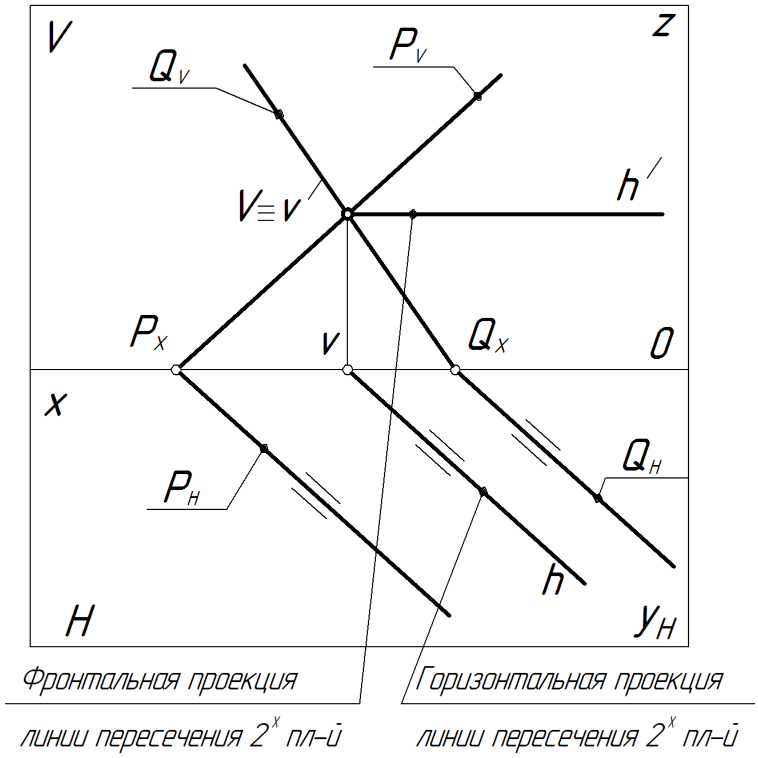


Рисунок 105 – Эпюр, пересечение двух плоскостей

IX. Одна и вторая пары следов пересекаются (рис. 106, 107).

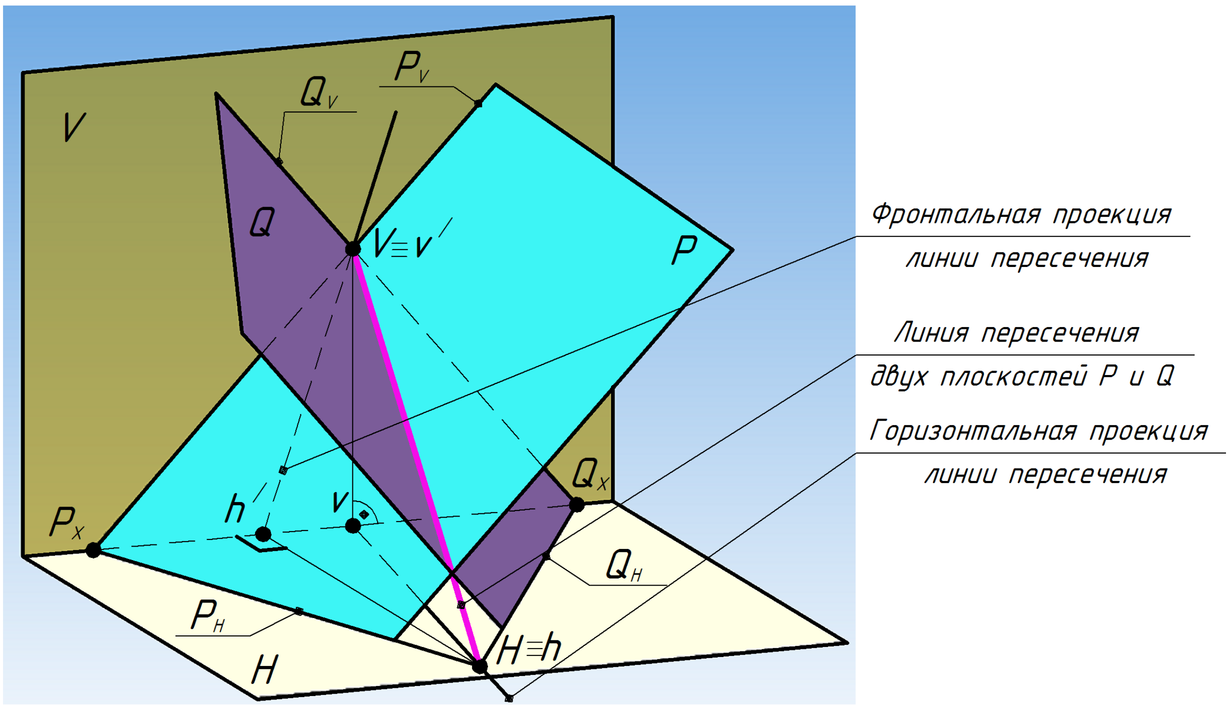


Рисунок 106 – Проецирующий аппарат, пересечение двух плоскостей

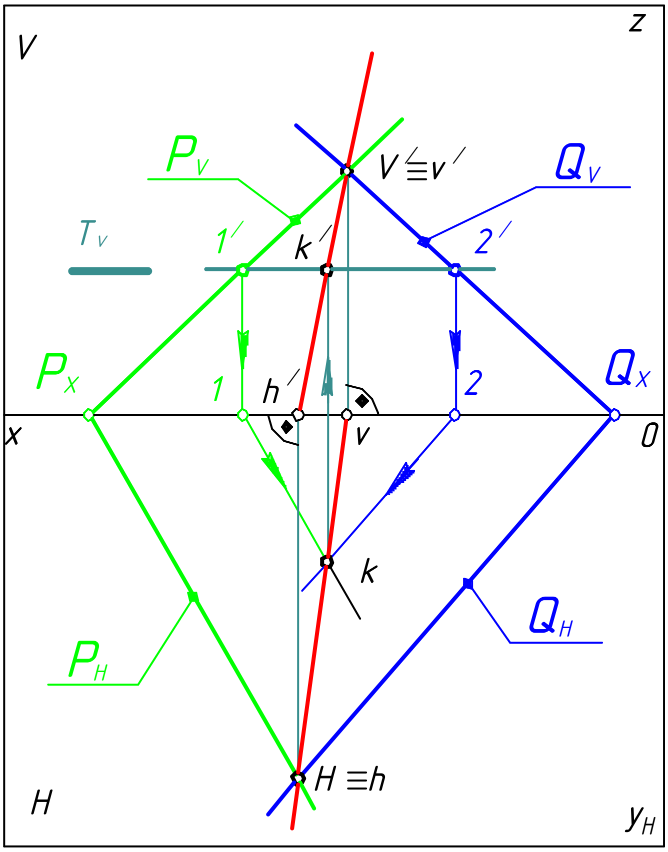


Рисунок 107 – Эпюр, пересечение двух плоскостей

X. Пересечение прямой с плоскостью общего положения (рис. 108).

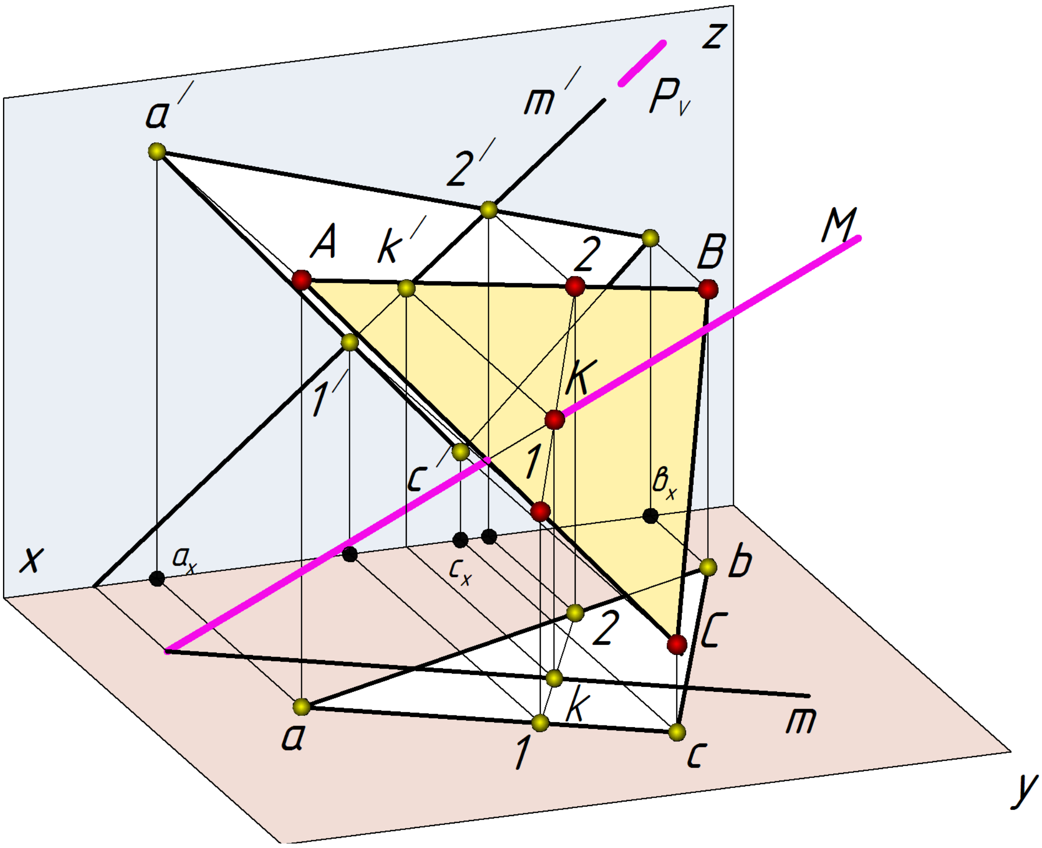


Рисунок 108 – Проецирующий аппарат, пересечение прямой с плоскостью

В общем случае для нахождения точек пересечения прямой с плоскостью поступаем следующим образом.

1. Заключаем прямую M во вспомогательную проецирующую плоскость $M \in Q$; $Q \perp V$. (рис. 109). Плоскость Q имеет собирательное свойство, все точки плоскости проецируются на фронтальный след плоскости Q_V.

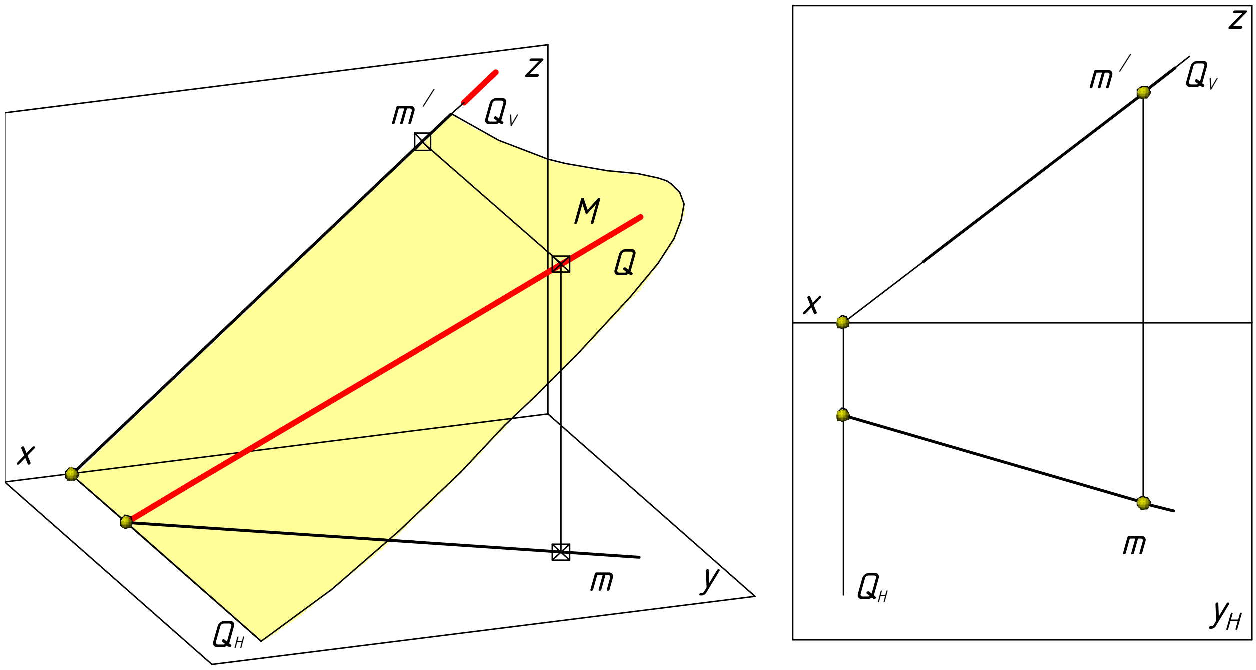


Рисунок 109 – Прямая M: *а* – проецирующий аппарат; *б* – эпюр

2. Находим пересечение вспомогательной плоскостью Q с заданной плоскостью ΔABC, получаем $Q \cap \Delta ABC = 1\ 2$ (рис. 110).

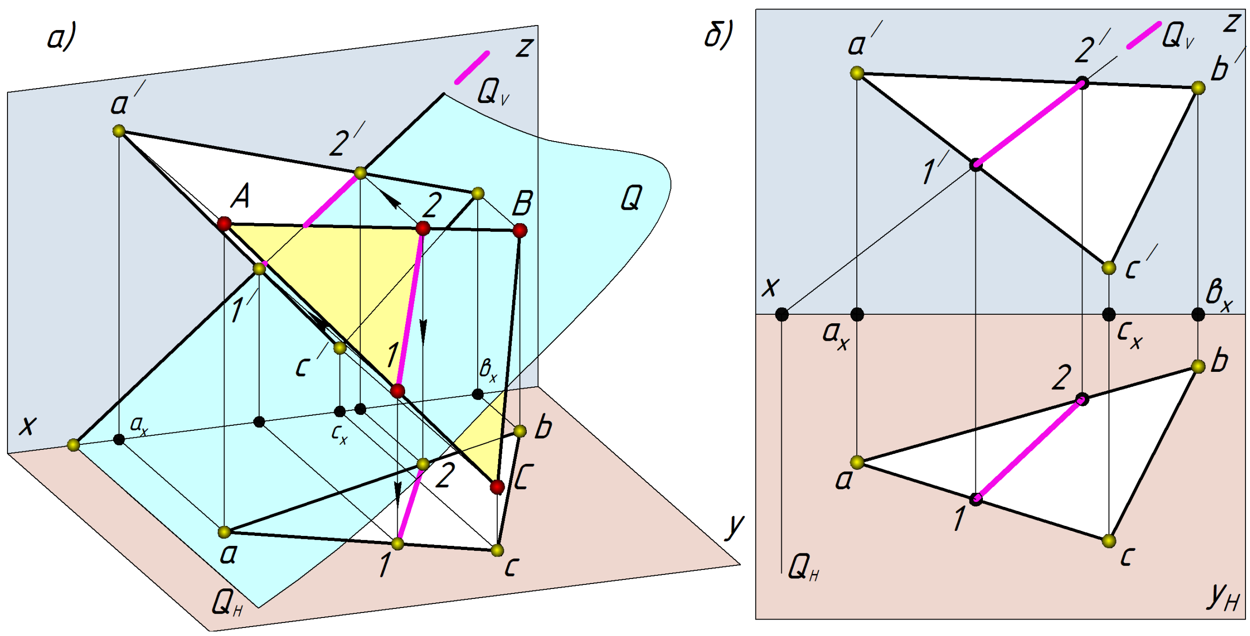


Рисунок 110 – $Q \cap \Delta ABC = 1\ 2$: *а* – проецирующий аппарат; *б* – эпюр

3. На пересечении полученной прямой 12 с заданным отрезком прямой M находим $(\cdot)\ K$, т. к. прямые лежат в одной плоскости Q (рис. 111).

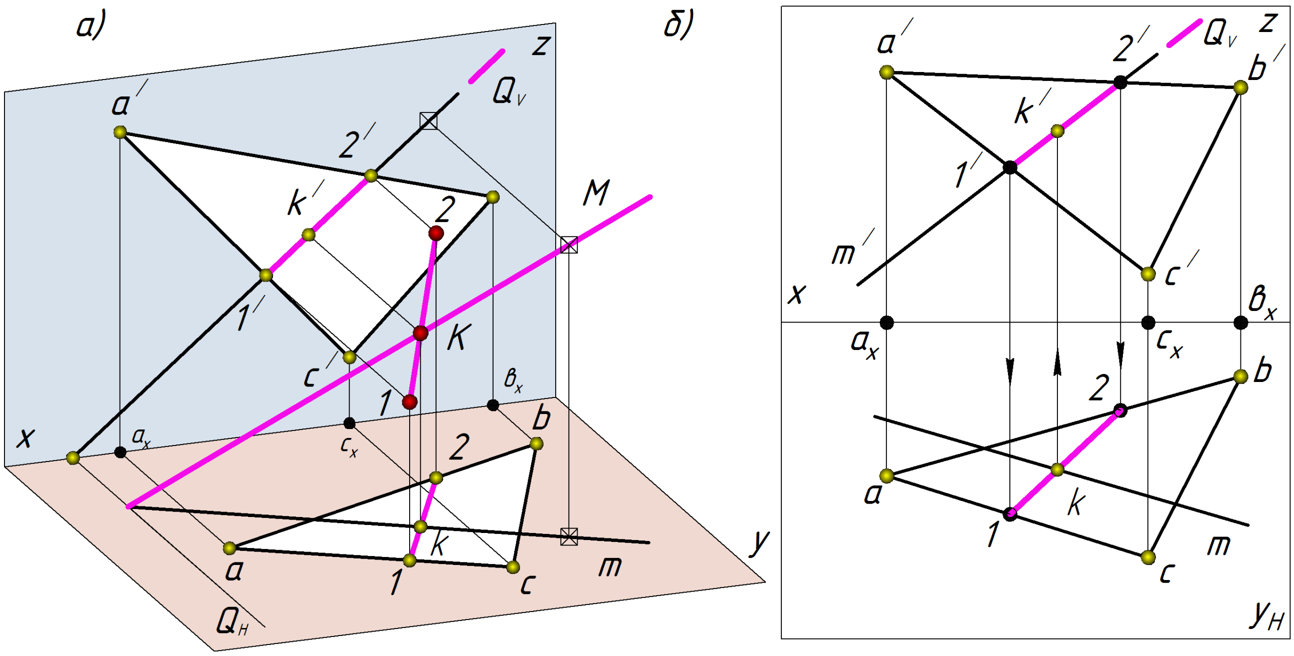


Рисунок 111 – Прямая $M \cap 12 = K$: *а* – проецирующий аппарат; *б* – эпюр

4. Методом конкурирующих точек определяем видимость отрезка прямой *M* относительно плоскости ΔABC, считая ее непрозрачной.

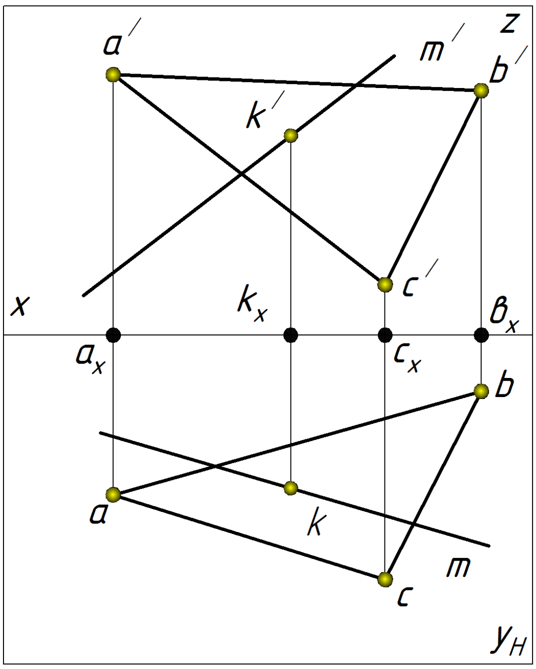


Рисунок 112 – Эпюр,

пересечение прямой с плоскостью

Определим видимость горизонтальной проекции прямой *M*. Для этого рассмотрим любые две скрещивающиеся прямые, например *M* и *AB*.

Горизонтальные проекции прямых пересекаются в точках 11 и 12 (рис. 112).

На эпюре (рис. 113, *б*) от пересечения горизонтальных проекций прямых поднимаем линию связи. Определяем фронтальные проекции точек соответственно *11'* на прямой *a'b'* и *12'* на прямой *m'*.

Смотрим на точки сверху, видим, что точка 11 идет раньше, чем точка 12 на одном проецирующем луче. Получаем, что отрезок прямой AB перекрывает прямую *M*. Прямая *M* до (·)К будет невидима на горизонтальной проекции.

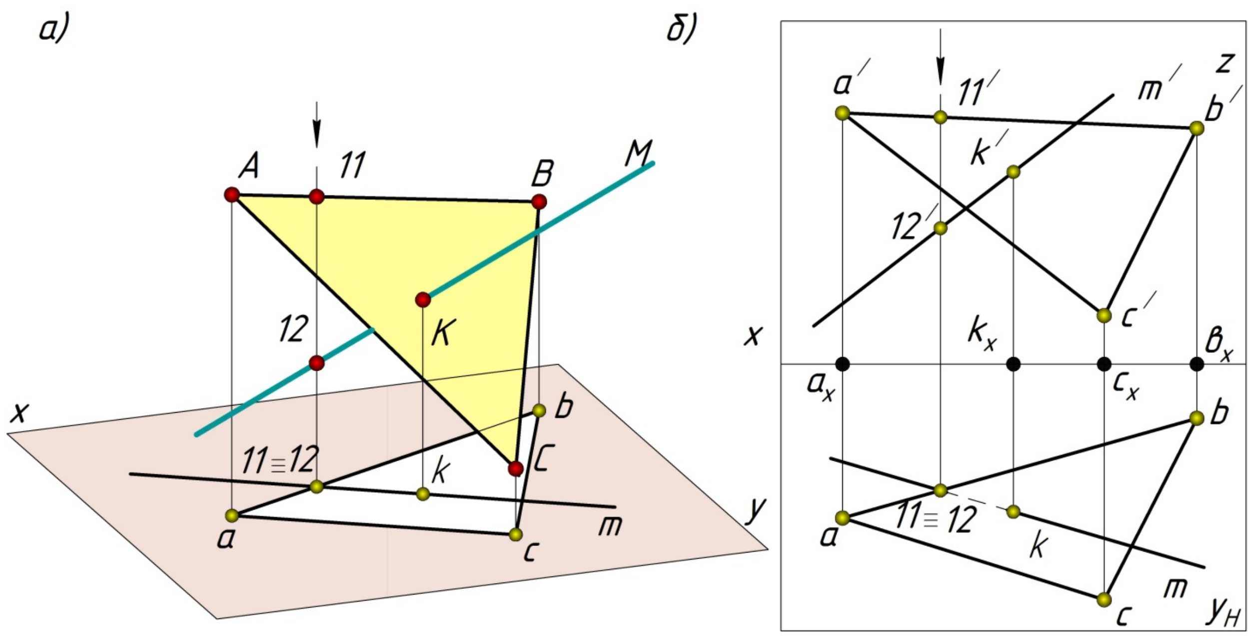


Рисунок 113 – Метод конкурирующих точек: *а* – проецирующий аппарат; *б* – эпюр

Определим видимость фронтальной проекции прямой *М*. Для этого рассмотрим любые две скрещивающиеся прямые, например, *М* и *АВ* (рис. 114).

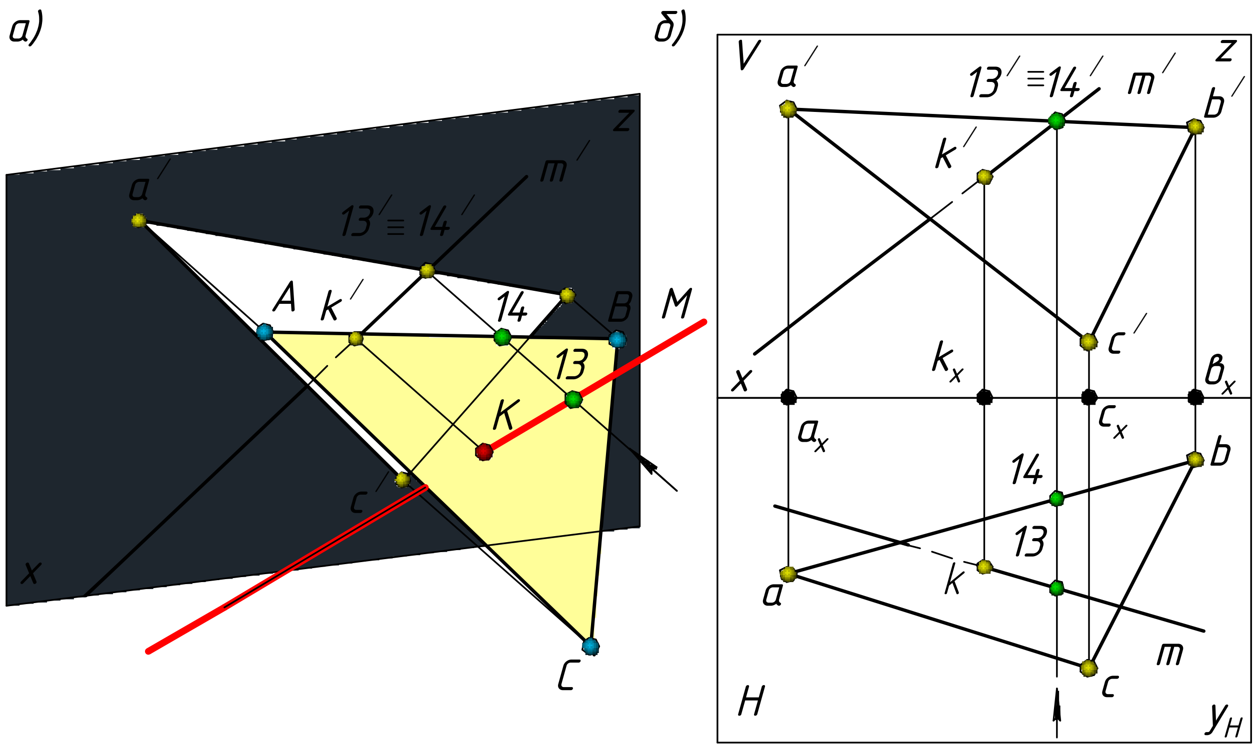


Рисунок 114 – Метод конкурирующих точек:
а – проецирующий аппарат; *б* – эпюр

На эпюре (рис. 114, *б*) от фронтальных проекций опускаем линию связи. Определяем горизонтальные проекции точек *13* на прямой *m* и *24* на прямой *ab*. Смотрим на точки снизу, видим, что точка *13* идет раньше, чем точка *14* на одном проецирующем луче. Получаем, что прямая *М* перекрывает отрезок прямой *АВ* в этом скрещивании прямых, поэтому фронтальная проекция прямой *M* до (·)К будет видима. Далее прямая *M* будет невидима (уйдет за плоскость).

XI. Пересечение двух плоскостей общего положения (рис. 115).

а) *б*)

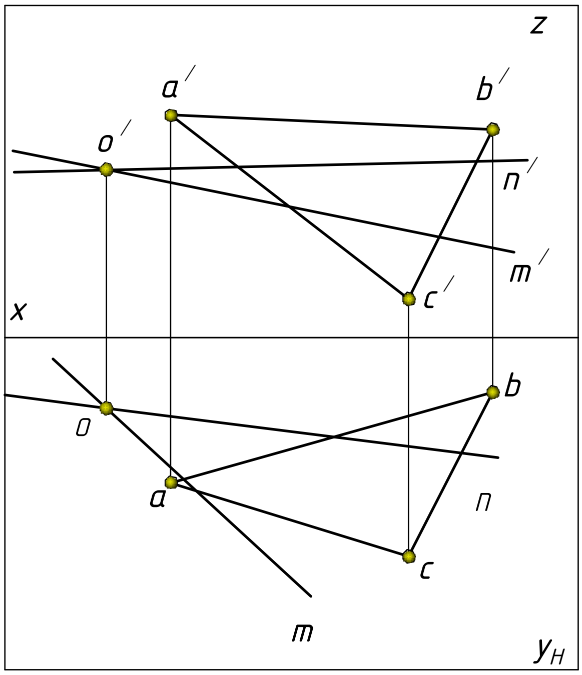


Рисунок 115 – Эпюр, пересечение двух плоскостей

Рассмотрим, в частности, пересечение прямой и плоскости (см. пересечение прямой с плоскостью). Разобьем эпюру на участки, когда прямая $N \cap \Delta ABC = G$ (рис. 116, *а*) и $M \cap \Delta ABC = K$ (рис. 116, *б*). Соединив точки пересечения K и G, получаем линию пересечения двух плоскостей $M \cap N \cap \Delta ABC = KG$ (рис. 115, *б*).

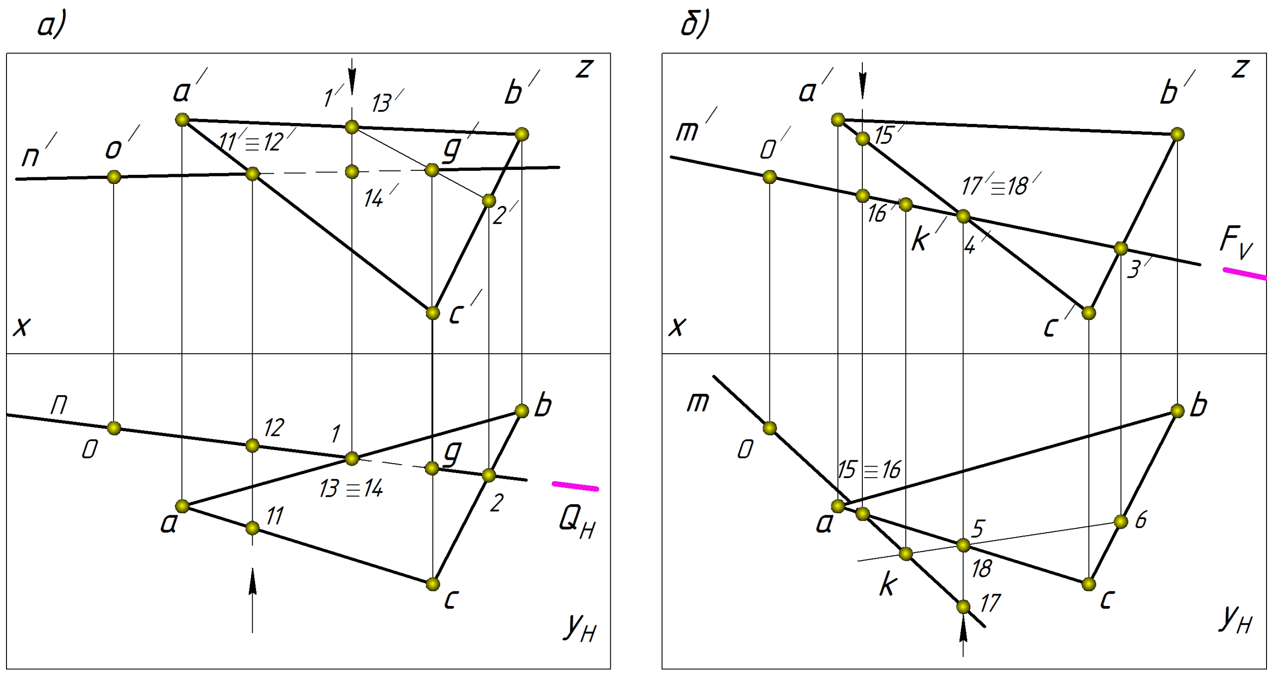


Рисунок 116 – Эпюр, пересечение прямой и плоскости

4.6 Параллельность прямой и плоскости

Признак параллельности прямой и плоскости

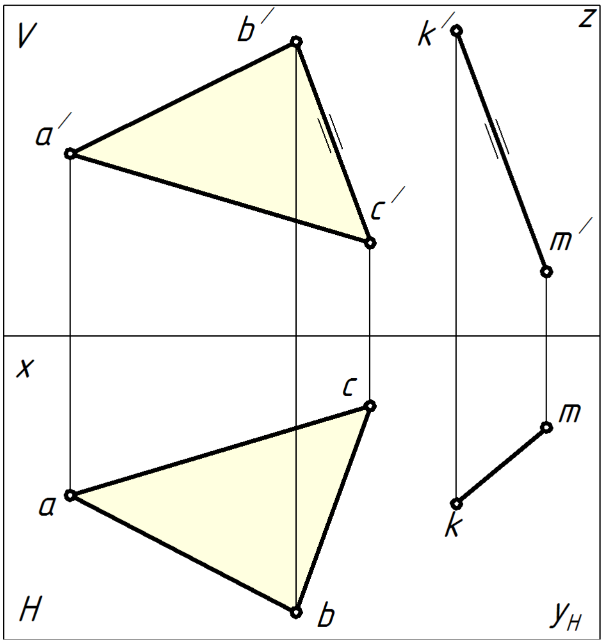


Рисунок 117 – Эпюр, прямая и плоскость

Прямая параллельна плоскости, если на плоскости имеется хотя бы одна прямая, ей параллельная (рис. 117).

Пример

I. Проверить, параллелен ли отрезок прямой KM плоскости ΔABC.

Рассмотрим теорему о параллельности прямых.

$k^/m^/ \parallel b^/c^/$; $km \nparallel bc$.

Значит, прямая KM не параллельна плоскости ΔABC.

II. Достроить горизонтальную проекцию AB при условии, что $AB \parallel P$ (рис. 119, *а*), построение см. на рис. 118, *б*.

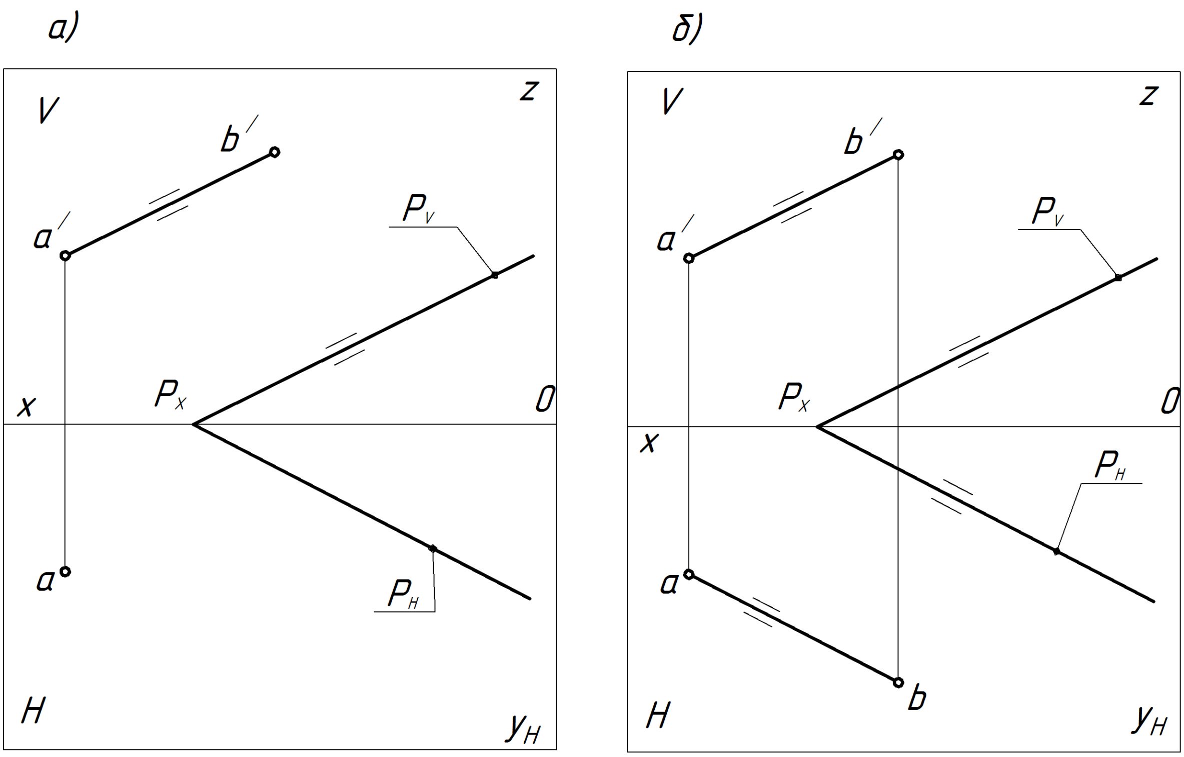


Рисунок 118 – Эпюр, прямая и плоскость, взаимное положение

III. Через точку *K* провести прямую параллельно заданной плоскости $M \parallel N$ (рис. 119, *а*), построение см. на рис. 119, *б*.

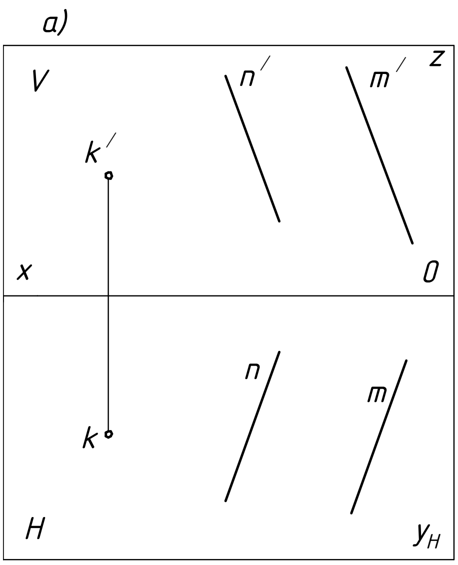


Рисунок 119 – Эпюр, прямая и плоскость, взаимное положение

4.7 Перпендикулярность прямой и плоскости

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости (рис. 120).

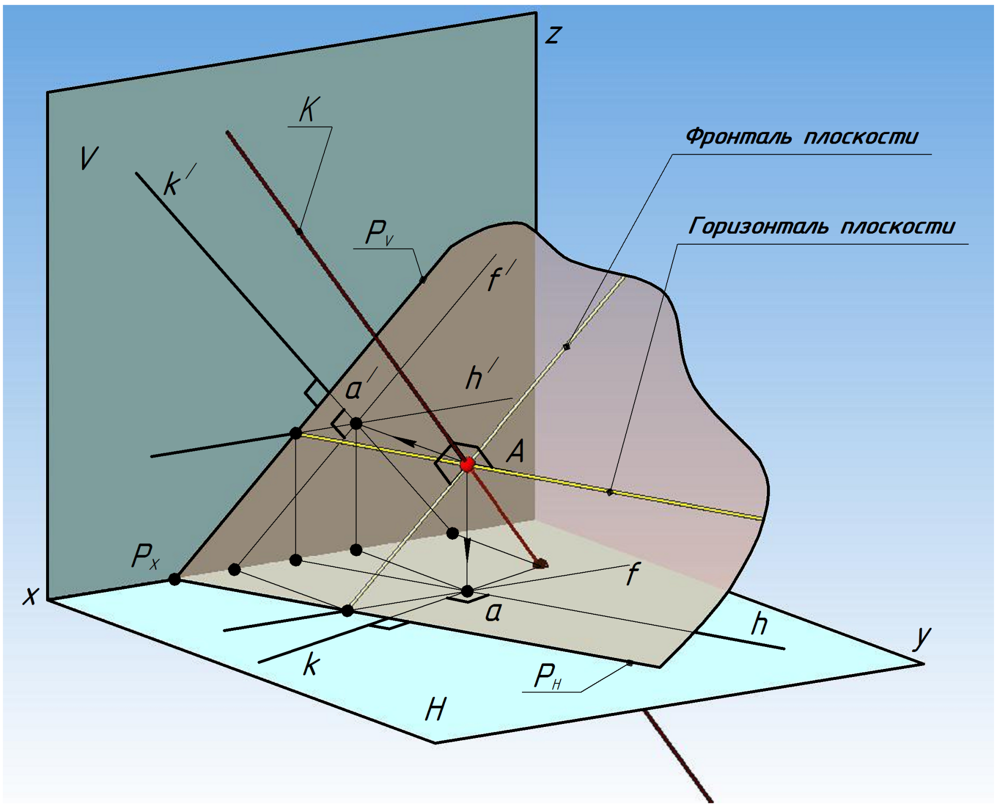


Рисунок 120 – Проецирующий аппарат, перпендикуляр к плоскости

Теорема: если в пространстве прямая перпендикулярна плоскости, то на чертеже горизонтальная проекция прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали или горизонтальному следу плоскости, а фронтальная проекция прямой перпендикулярна фронтальной проекции фронтали или фронтальному следу плоскости.

Пример: известны плоскость P и точка A лежащая в плоскости $A \in P$ (рис. 121, *а, б*). Необходимо построить прямую K перпендикулярно плоскости P и проходящую через точку A. $K \perp P$.

Решение:

1 – Согласно определению перпендикуляра к плоскости (прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым принадлежащим этой плоскости), через точку A проведем две пересекающиеся прямые, например, прямые частного положения, фронталь и горизонталь плоскости (рис. 121, *б*).

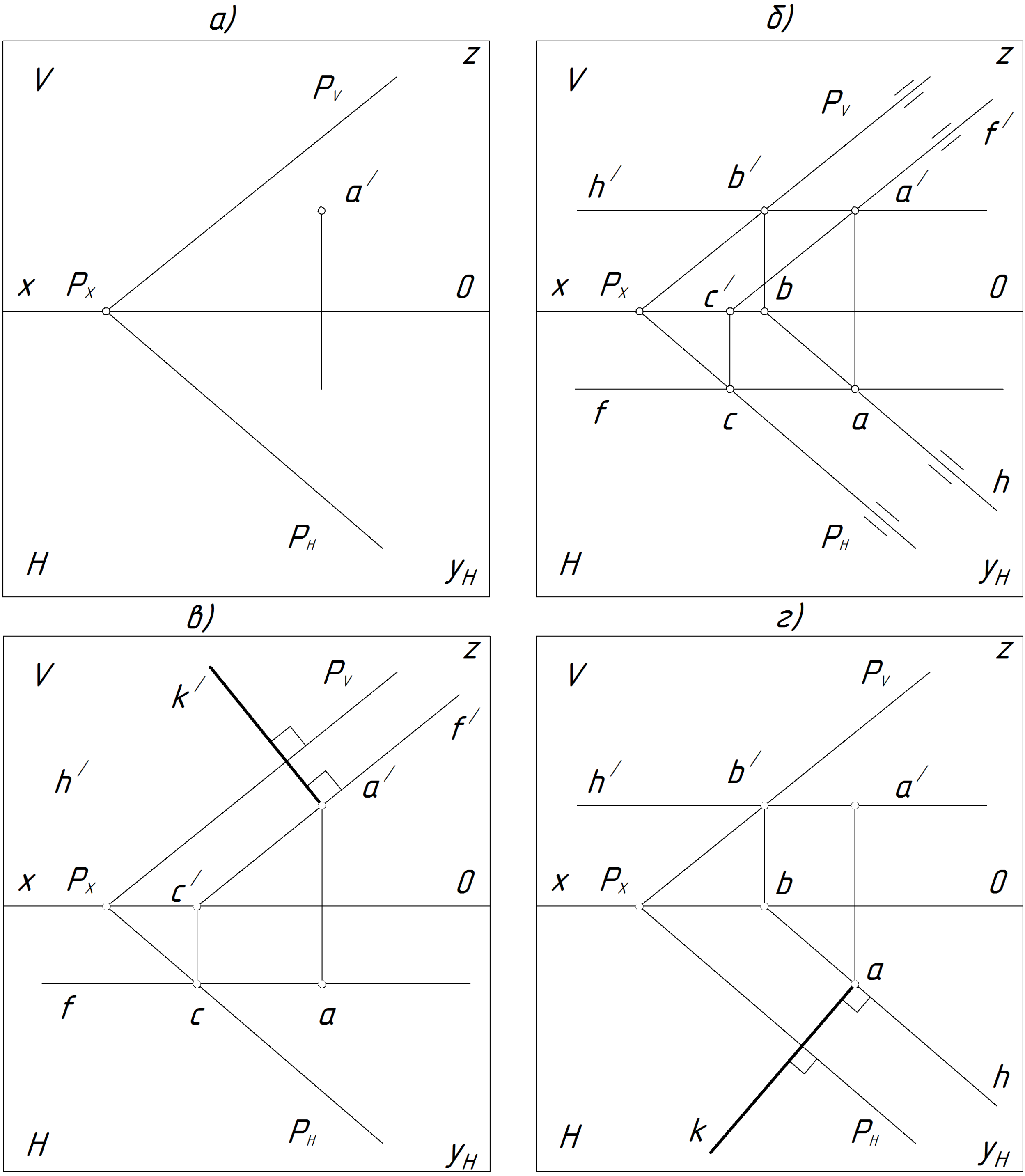


Рисунок 121 – Эпюр, перпендикуляр к плоскости, порядок построения

2 – Рассмотрим в пространстве прямую *K* и фронталь плоскости, между собой прямые перпендикулярны, т. е. дают две стороны прямого угла. На основании теоремы о проецировании прямого угла найдем горизонтальную проекция перпендикуляра к плоскости: если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, то угол на эту плоскость проецируется без искажения. Значит, фронтальная проекция перпендикуляра прямой *K* проецируется перпендикулярно фронтальной проекции фронтали или фронтальному следу плоскости (рис. 121, *в*).

3 – Рассмотрим в пространстве прямую *K* и горизонталь плоскости, между собой прямые перпендикулярны, которые дают две стороны прямого угла. На основании теоремы о проецировании прямого угла горизонтальная проекция перпендикуляра прямой *K* проецируется перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали или горизонтальному следу плоскости (рис. 121, *г*).

В конечном итоге, когда плоскость задана следами, главные линии плоскости проводить необязательно (рис. 122), их проводят тогда, когда плоскость задана не следами, зная свойство, что горизонтальная проекция горизонтали плоскости всегда параллельна горизонтальному следу, а фронтальная проекция фронтали плоскости всегда параллельна фронтальному следу.

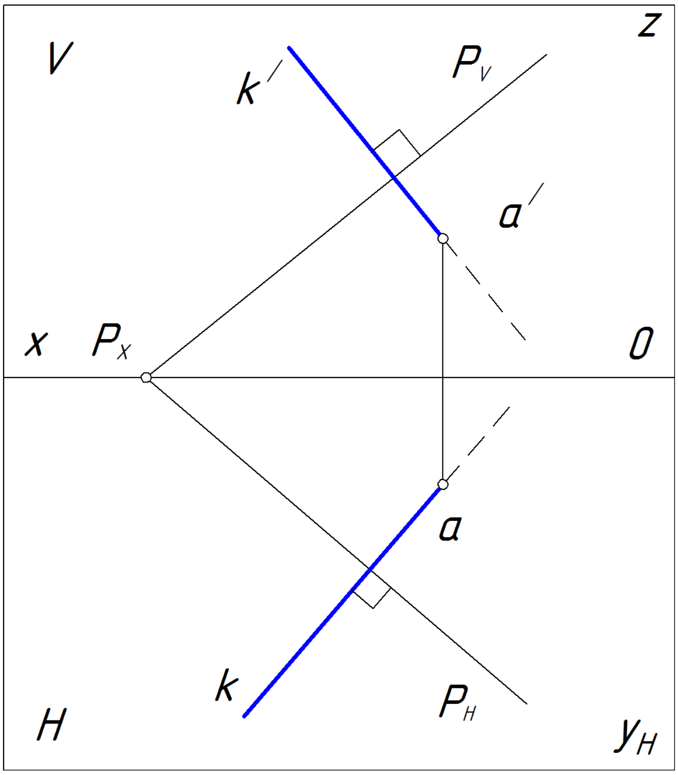


Рисунок 122 – Эпюр, перпендикуляр к плоскости

Пример: определить расстояние от точки *K* до плоскости треугольника Δ*ABC* (рис. 123, *а*).

Решение:

1 – Проводим главные линии плоскости (фронталь и горизонталь плоскости). Строим проекции перпендикуляра к плоскости, т. к. кратчайшим расстоянием является перпендикуляр (нормаль) (рис. 123, *б*).

2 – Находим пересечение прямой с плоскостью (рис. 124) и определяем видимость прямой.

3 – Методом прямоугольного треугольника определяем расстояние от точки *К* до плоскости треугольника Δ*ABC*. Отрезок *КМ* (рис. 125).

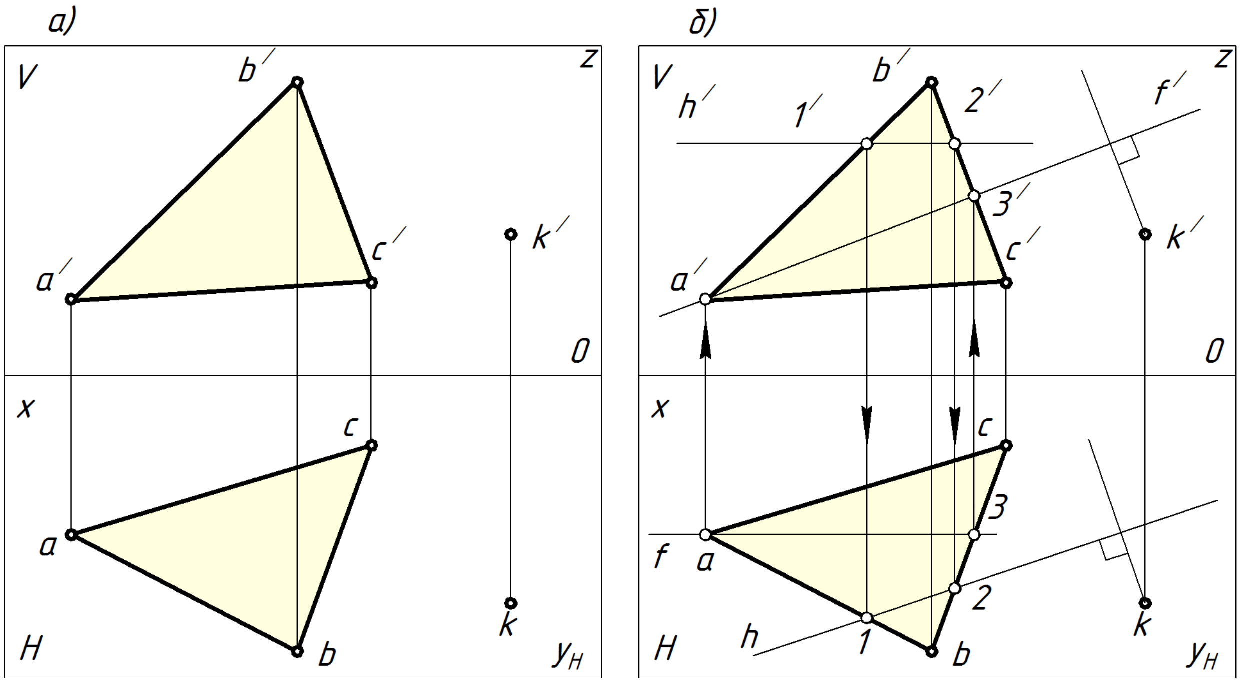


Рисунок 123 – Эпюр, перпендикуляр к плоскости

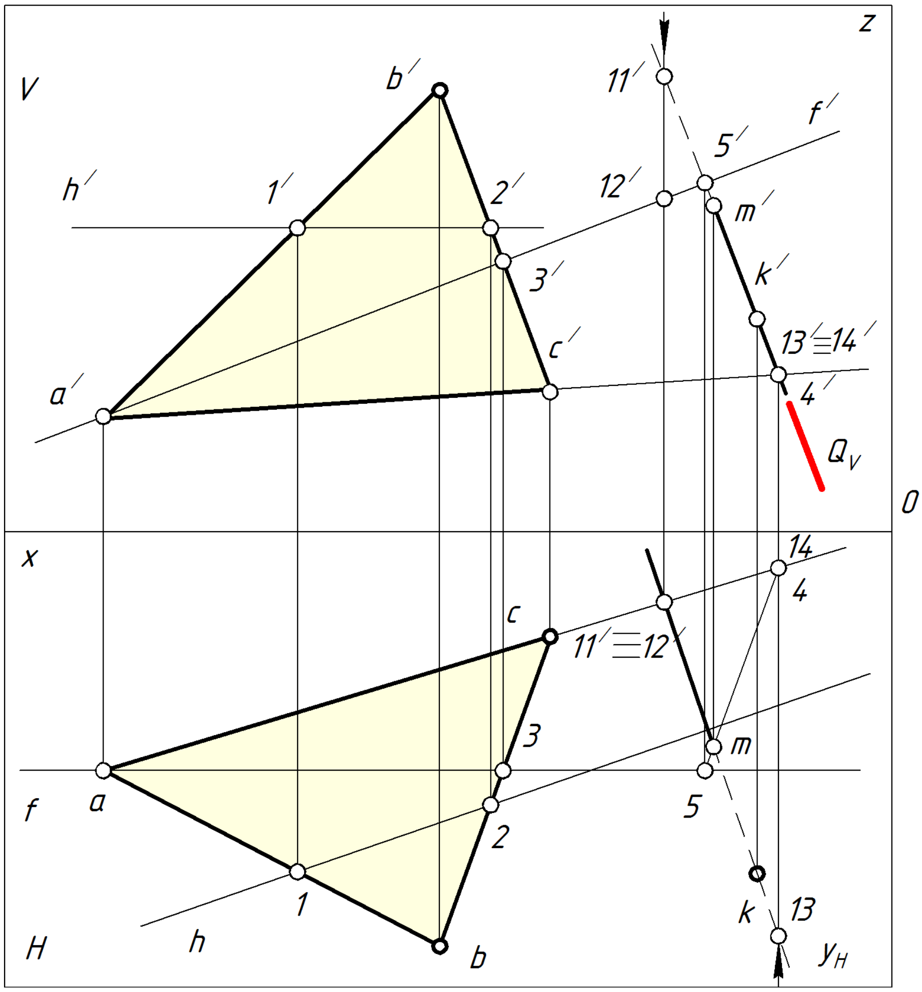


Рисунок 124 – Эпюр, перпендикуляр к плоскости

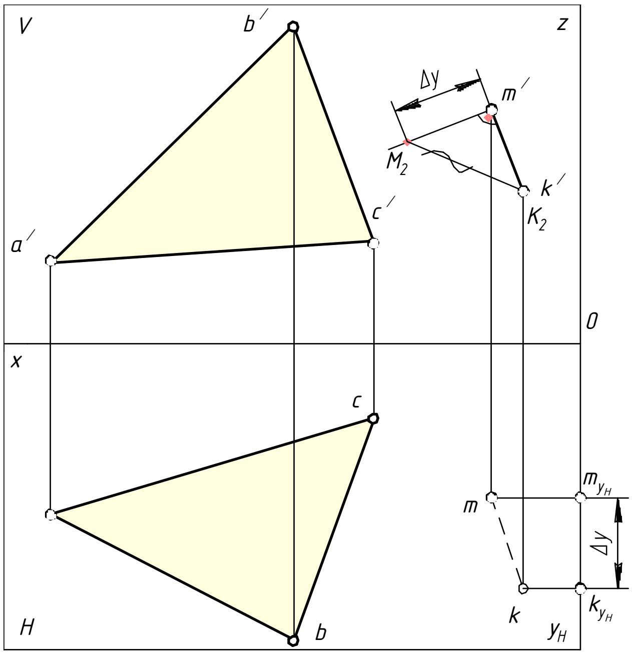


Рисунок 125 – Эпюр, перпендикуляр к плоскости. Определение натуральной величины

4.8 Перпендикулярность плоскостей

Две плоскости перпендикулярны, если хотя бы одна прямая одной плоскости перпендикулярна другой плоскости или двум пересекающимся прямым другой плоскости.

Пример: через отрезок ***AB*** (рис. 126, *а*) провести плоскость ***P*** перпендикулярно заданной плоскости Δ*KMN*. *P* ⊥ Δ*KMN*. Определить точки встречи двух плоскостей ***P***⋂Δ ***KMN***.

1 – Проведем главные линии плоскости (рис. 126, *б*).

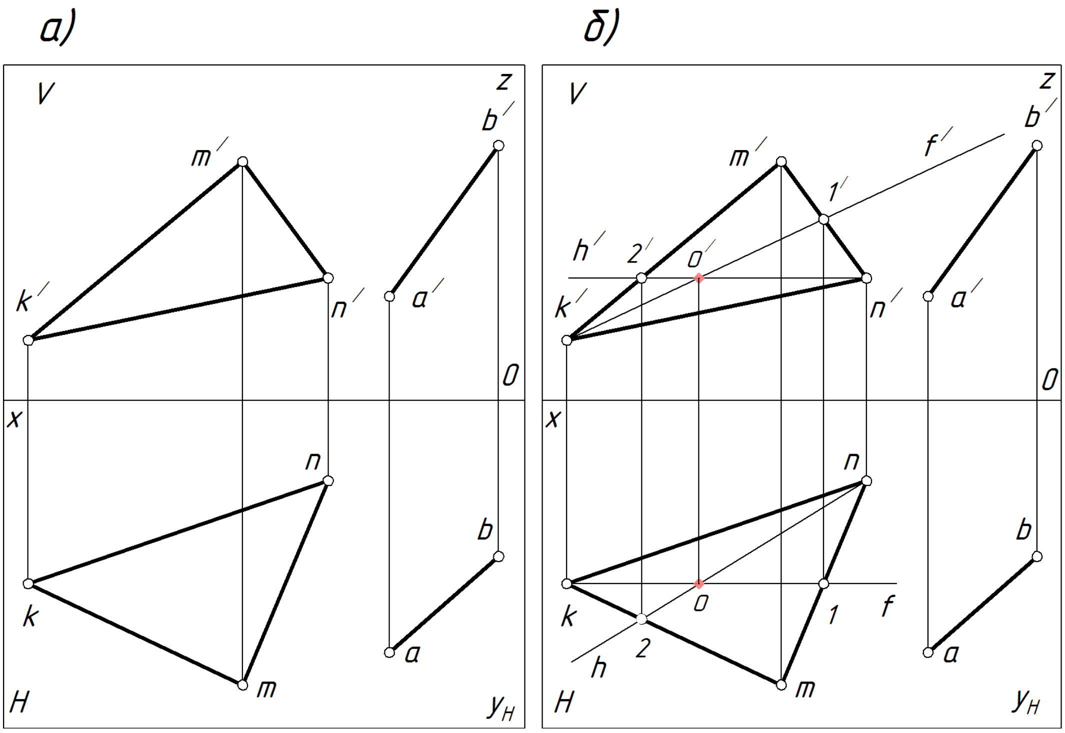


Рисунок 126 – Эпюр, перпендикулярность плоскостей

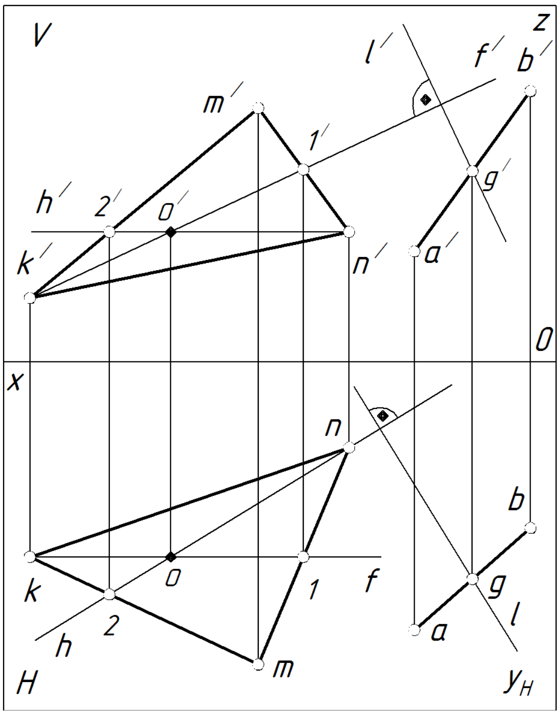


Рисунок 127 – Эпюр, перпендикулярность плоскостей

2 – Произвольно на отрезке AB возьмем точку G, к примеру, середину отрезка (рис. 127).

Проводим прямую L перпендикулярно плоскости треугольника ΔKMN от точки G. $P = L \cap AB$.

3 – Находим линию пересечения двух плоскостей, см. рис. 115 .

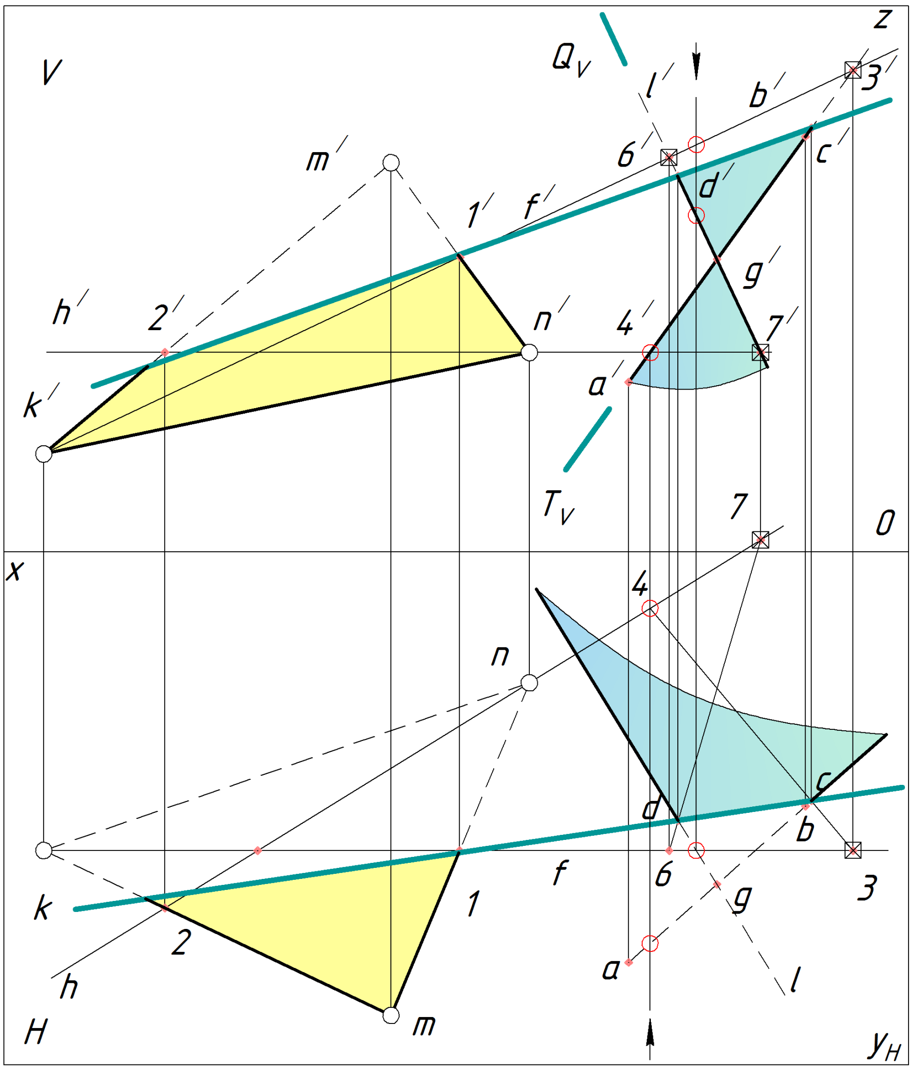


Рисунок 128 – Эпюр, перпендикулярность плоскостей

Пример: достроить недостающий след плоскости Q при условии, что плоскости взаимно перпендикулярны $P \perp Q$ (рис. 129, *а*).

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них содержит прямую, перпендикулярную второй плоскости.

Отсюда: $AB \in P$ и $AB \perp Q$, т. к. $a'b' \perp Q_V$; $ab \perp Q_H$ (рис. 129, *б*).

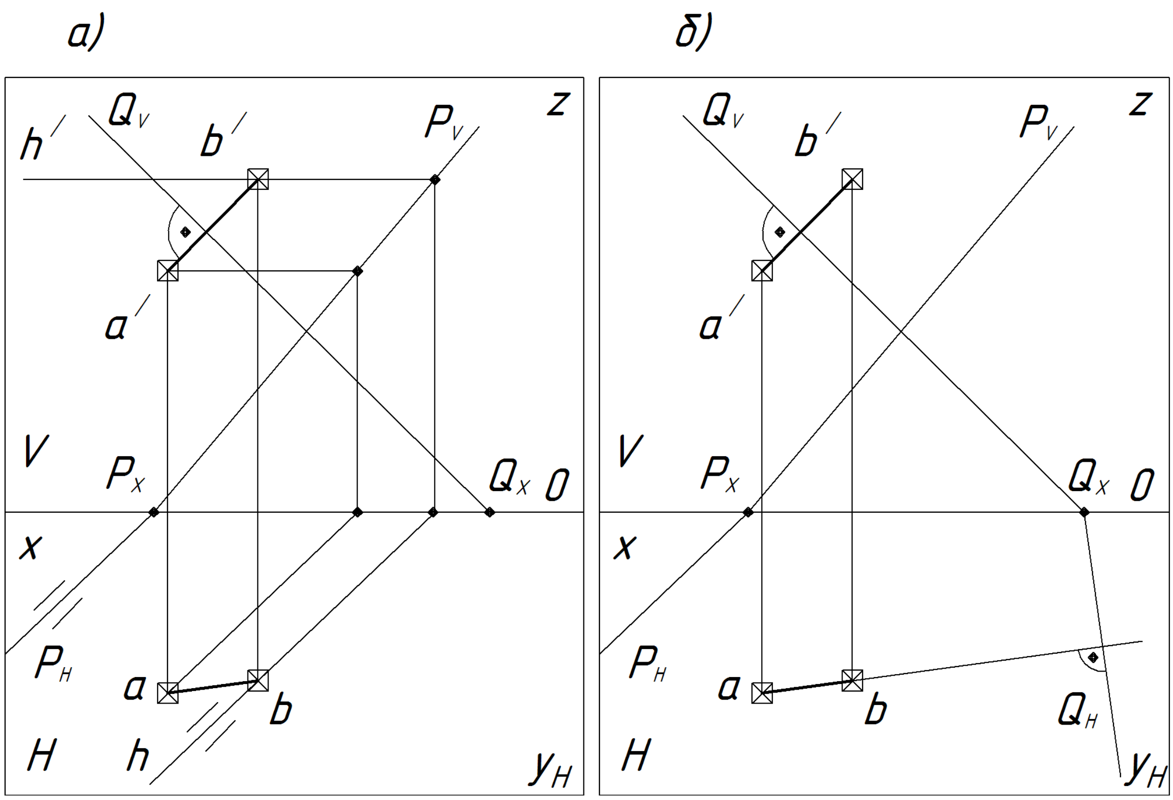


Рисунок 129 – Эпюр, перпендикулярность плоскостей

4.9 Параллельность прямой и плоскости

Прямая параллельна плоскости, если на плоскости имеется хотя бы одна прямая, параллельная ей.

Пример: проверить, параллельна ли прямая AB плоскости P (рис. 130, *а*).

Решение. Согласно теореме параллельности прямой и плоскости, можно провести прямую, лежащую в плоскости P параллельно AB и проверить. Поступаем следующим образом.

1 – Произвольно проведем фронтальную проекцию прямой M параллельно фронтальной проекции отрезка AB. $M \in P$; $m' \parallel a'b'$.

2 – После того, как провели фронтальную проекцию прямой M, нужно построить горизонтальную проекцию этой прямой. Воспользуемся правилом: принадлежность прямой плоскости (рис.130, *б*).

3 – Если построенная горизонтальная проекция прямой M окажется параллельна горизонтальной проекции отрезка AB $(m \parallel ab)$, то отрезок параллелен плоскости $AB \parallel P$. Если нет $m \nparallel ab$, то $AB \nparallel P$.

Ответ: отрезок $AB \nparallel P$, т. к. $m \nparallel ab$.

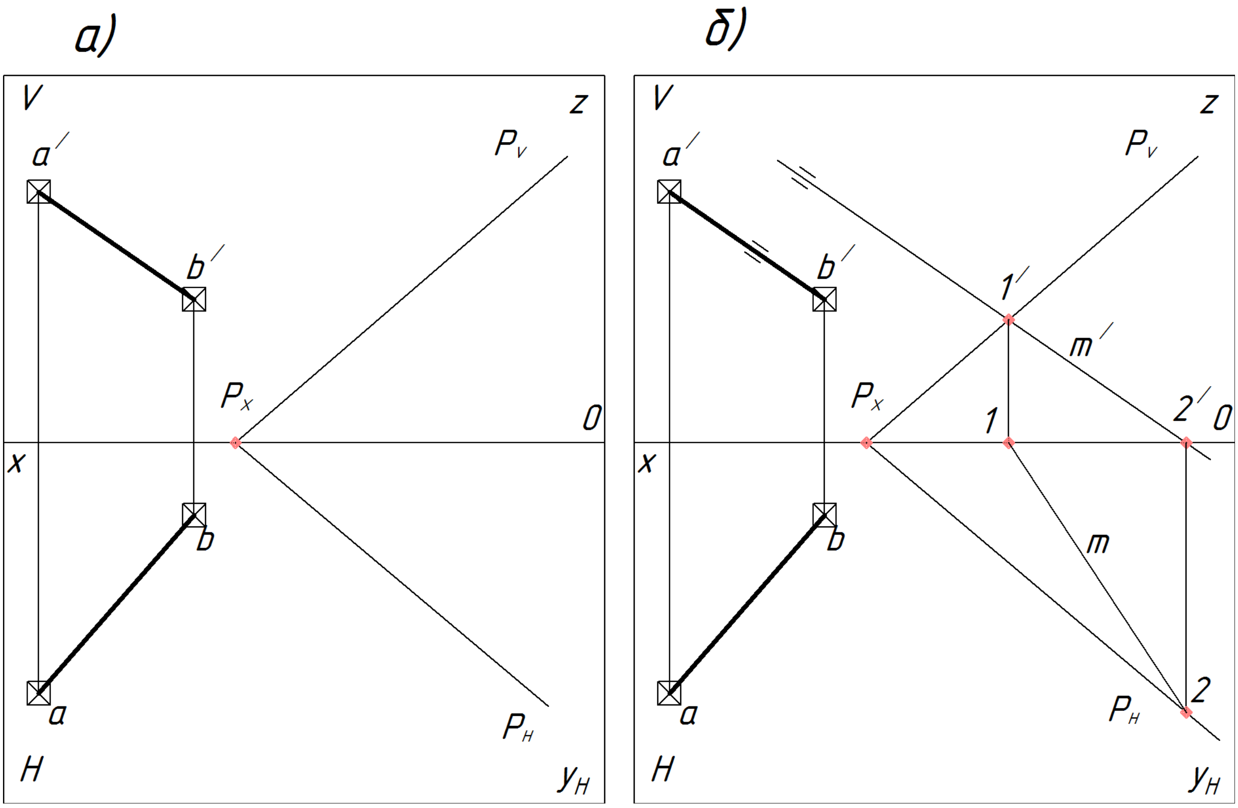


Рисунок 130 – Эпюр, параллельность прямой и плоскости

Пример: достроить недостающую проекцию точки B при условии, что отрезок прямой AB параллелен плоскости, заданной двумя параллельными прямыми $M \parallel N = P$ (рис. 131, *а*).

Решение. В плоскости P проводим прямую L, параллельную отрезку прямой AB. Согласно теореме о параллельности прямой и плоскости проводим недостающую проекцию отрезка AB и по линии связи определяем точку B (рис. 120, *б*).

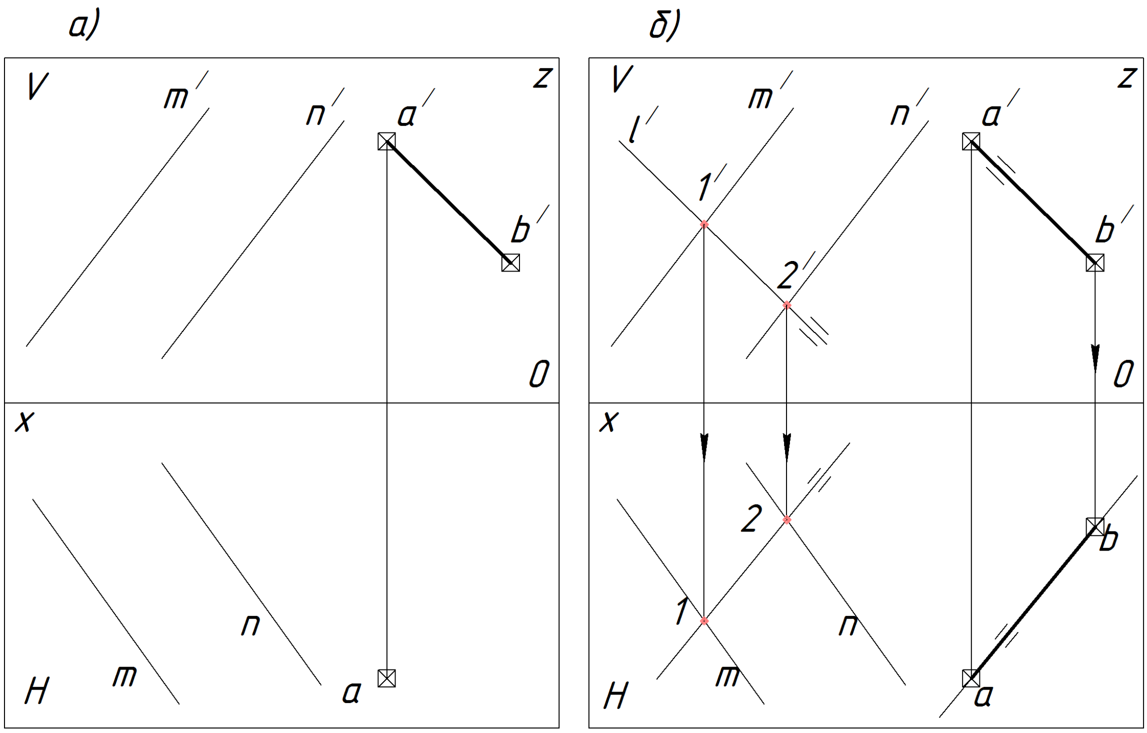


Рисунок 131 – Эпюр, параллельность прямой и плоскости

4.10 Параллельность плоскостей

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости (рис. 132).

Если в пространстве плоскости параллельны, то на чертеже параллельны их одноименные проекции или следы (рис. 133).

Прямая теорема: если плоскости параллельны, то на чертеже параллельны горизонтальные проекции их горизонталей и фронтальные проекции их фронталей этих плоскостей.

Обратная теорема: если на чертеже одноименные следы плоскостей параллельны, то такие плоскости параллельны в пространстве.

Пример: проверить, параллельны ли плоскости $\Delta\, ABC$ и $M \parallel N$ (рис. 134, *а*).

Решение. Проведем горизонталь плоскости $\Delta\, ABC$ и $M \parallel N = Q$. Построим их горизонтальные проекции. Если горизонтальные проекции горизонталей плоскости $\Delta\, ABC$ и Q будут параллельными, то плоскости параллельны между собой $\Delta\, ABC \parallel Q$. Если нет, то $\Delta\, ABC \nparallel Q$ (рис. 134, *б*).

Ответ: плоскости не параллельны, т. к. $h_{ABC} \nparallel h_{MN}$.

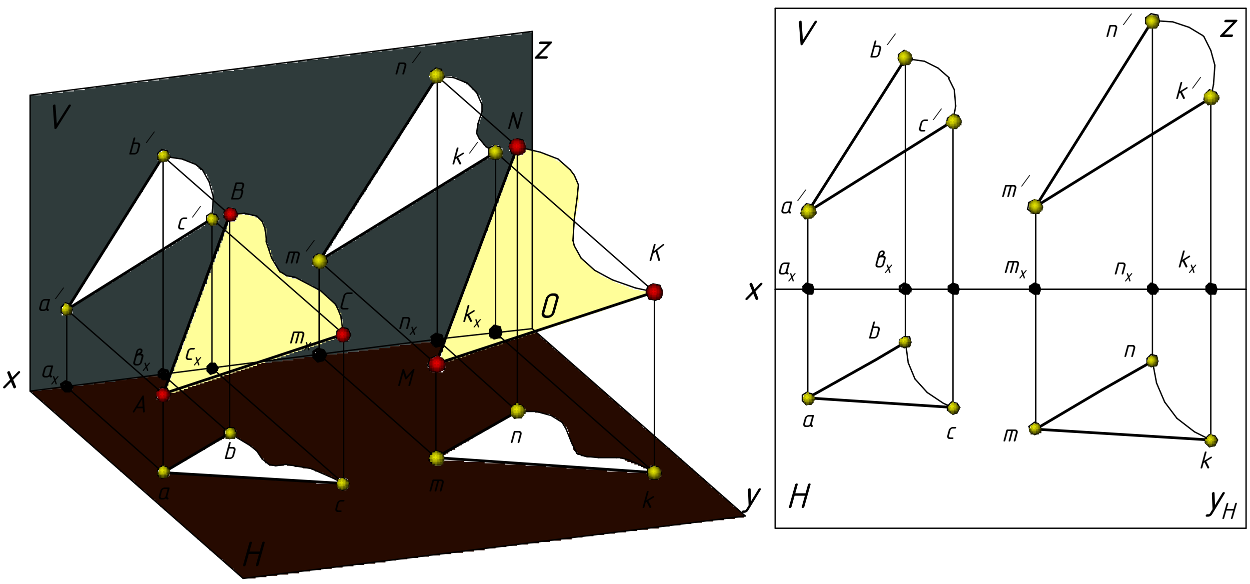


Рисунок 132 – Проецирующий аппарат и эпюр параллельных плоскостей

Пример: плоскости по положению профильно-проецирующие, заданы следами. Определить, параллельны ли заданные плоскости (рис. 135, *а*).

Решение: Необходимо построить профильные следы плоскостей. Если профильные следы (одноименные) между собой параллельны, значит, плоскости параллельны. Если нет, то плоскости не параллельны (рис. 135, *б*).

Ответ: плоскости не параллельны, т. к. $P_W \nparallel Q_W$.

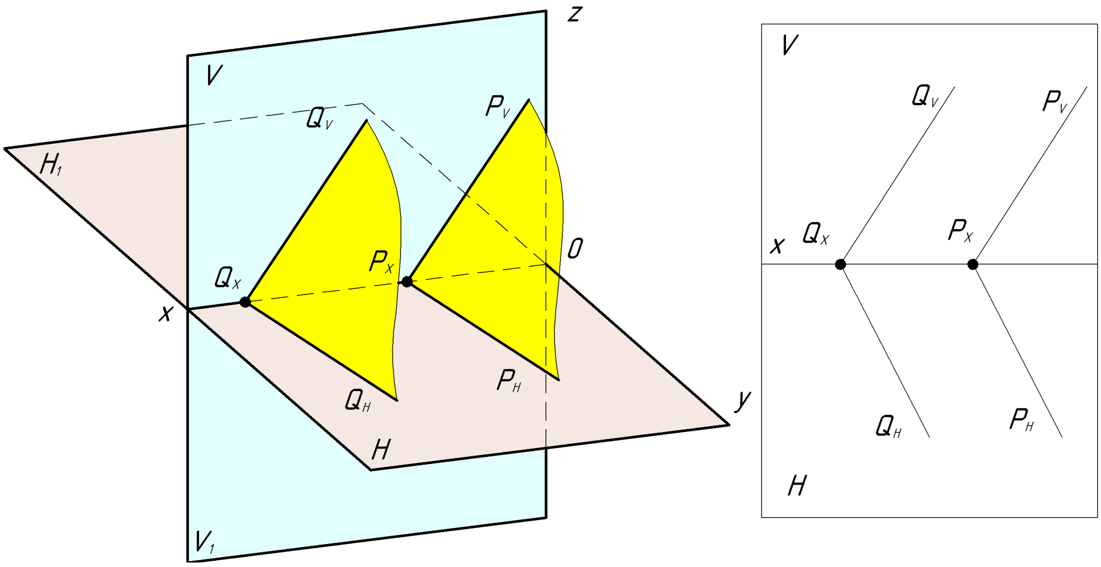


Рисунок 133 – Проецирующий аппарат и эпюр параллельных плоскостей

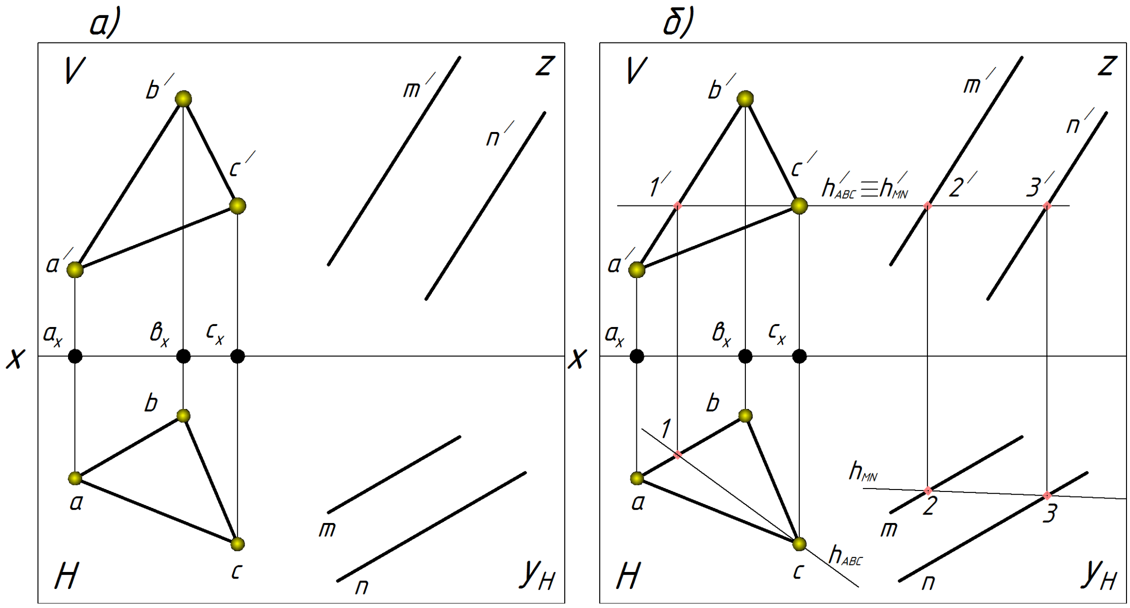


Рисунок 134 – Эпюр параллельных плоскостей

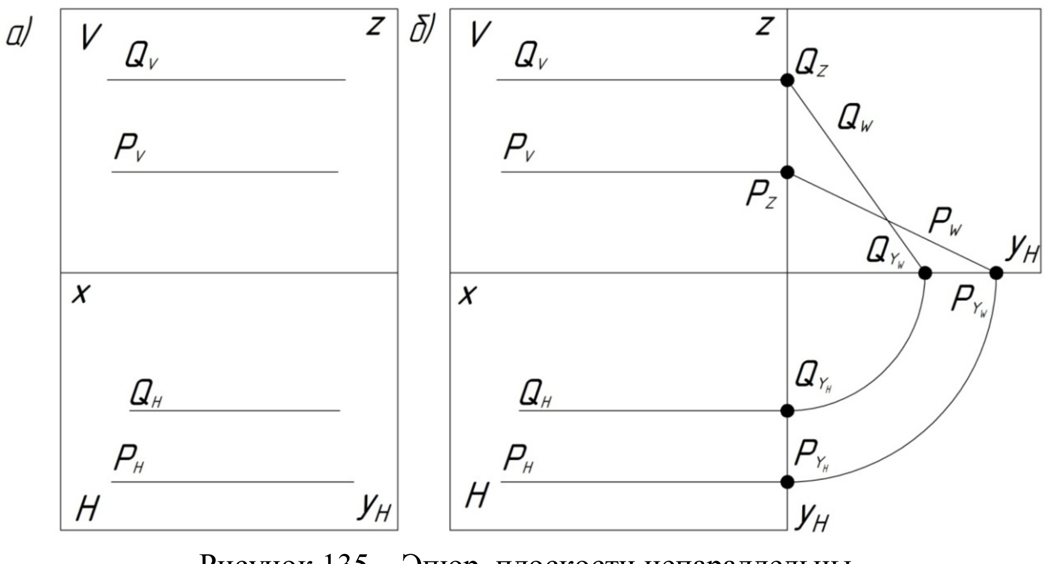


Рисунок 135 – Эпюр. плоскости непараллельны

Контрольные вопросы к теме 4

1. Способы задания плоскости на чертежах (дать формулировку кинематического способа задания плоскости)?
2. Что называется следами плоскости?
3. Дать классификацию заданных плоскостей по отношению к основным плоскостям проекций.
4. Что называют проецирующими плоскостями и как они обозначаются?
5. Какие плоскости называются плоскостями уровня?
6. Как располагается горизонтальная проекция фронтального следа плоскости?
7. Как располагается фронтальная проекция горизонтального следа плоскости?
8. Могут ли проекции одной точки принадлежать двум следам плоскости общего положения? Если могут, то, в каком случае?
9. Где располагаются точки схода следов на эпюре?
10. Охарактеризовать принадлежность точки плоскости.
11. В каком случае прямая принадлежит плоскости?
12. В каком случае прямая принадлежит плоскости, заданной следами?
13. Назовите главные линии плоскости.
14. Эпюрные признаки прямых уровня плоскости?
15. Эпюрные признаки линий наибольшего наклона плоскости?
16. Дать определение общих элементов прямой и плоскости, двух плоскостей.
17. Дать алгоритм для нахождения точки встречи прямой с плоскостью.
18. Способ определения видимости прямой и плоскости, двух плоскостей?
19. Эпюрные признаки параллельности прямой и плоскости?
20. Эпюрные признаки перпендикулярности прямой и плоскости?
21. Определение и эпюрные признаки перпендикулярности двух плоскостей?
22. Определение и эпюрные признаки параллельности прямой и плоскости?
23. Определение и эпюрные признаки параллельности двух плоскостей?

Тема 5 Способы преобразования ортогонального чертежа

На эпюрах (чертежах) проекции элементов предметов проецируюся с искажениями. Для решения метрических, позиционных задач требуется определить натуральную величину геометрических образов (прямую, плоскость), например, при выполнении разверток поверхностей геометрических тел. Другими словами способы преобразования проекций необходимы для того, чтобы перейти с общего положения проекций на частное положение проекций.

Различают способы преобразования проекций:

1) способ прямоугольного прямоугольника;
2) способ вращения;
3) способ перемены плоскостей проекций;
4) способ плоско-параллельного перемещения;
5) способ совмещения.

5.1 Способ прямоугольного треугольника

Способ рассмотрен в теме 3 «Проецирование прямой». Способ основан на преобразовании прямой общего положения, в результате определяем натуральную величину отрезка и углы наклона к плоскостям проекций.

5.2 Способ вращения

Способ основан на том, что заданная точка, прямая, плоская фигура вращаются вокруг оси, перпендикулярной одной из плоскостей проекций, до требуемого положения проекций.

I. Вращение точки

Дана точка A и ось вращения I (рис. 136, *а*).

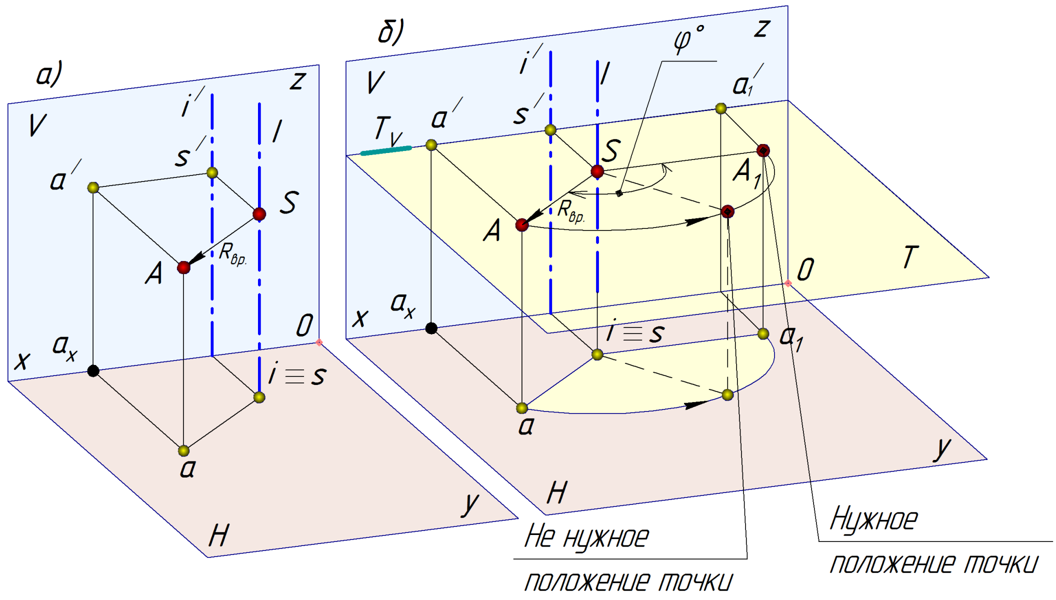


Рисунок 136 – Проецирующий аппарат, вращение точки

Ось располагается перпендикулярно плоскости проекций. Кратчайшим расстоянием от точки до прямой является перпендикуляр, который является радиусом вращения точки вокруг прямой (рис. 136, *б*).

SA – радиус вращения; T – горизонтальная плоскость уровня. $SA \in T$; $\angle\varphi°$ – угол вращения до нужного положения. $SA = sa = sa_1 = s'a'_1$.

II. Вращение прямой

Результаты этого способа дают натуральную величину отрезка прямой и угол наклона отрезка прямой к плоскости проекций (рис. 137).

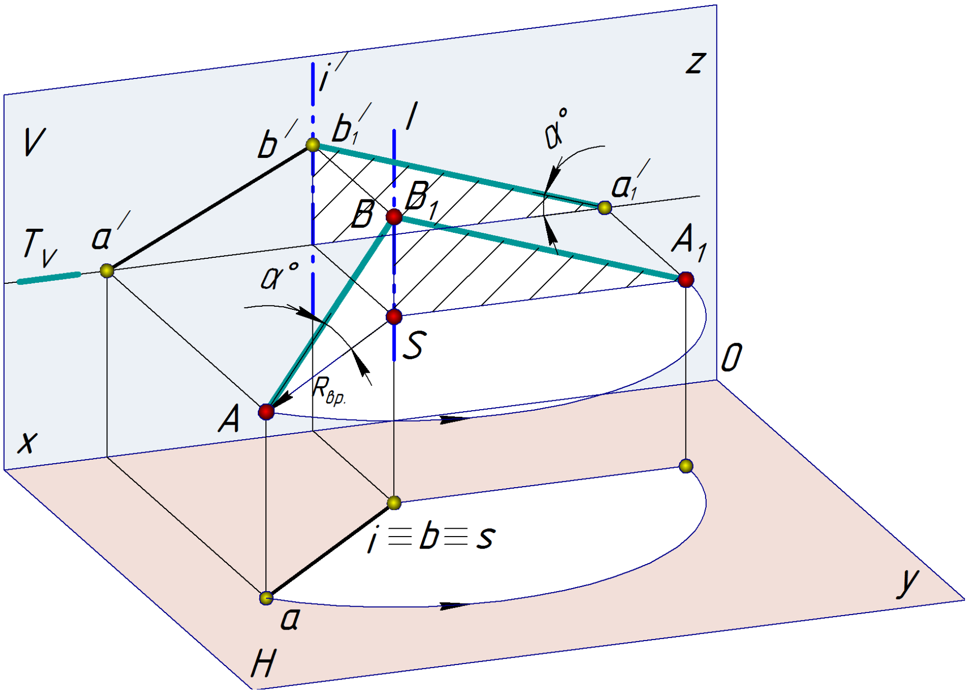


Рисунок 137 – Проецирующий аппарат, вращение отрезка прямой

Дан отрезок прямой AB (рис. 138, *а*). Требуется определить натуральную величину отрезка и углы его наклона к плоскостям проекций $\angle\alpha°$ к горизонтальной плоскости проекций и $\angle\beta°$ к фронтальной плоскости проекций. Решение показано на рис. 138, *б* и *в*.

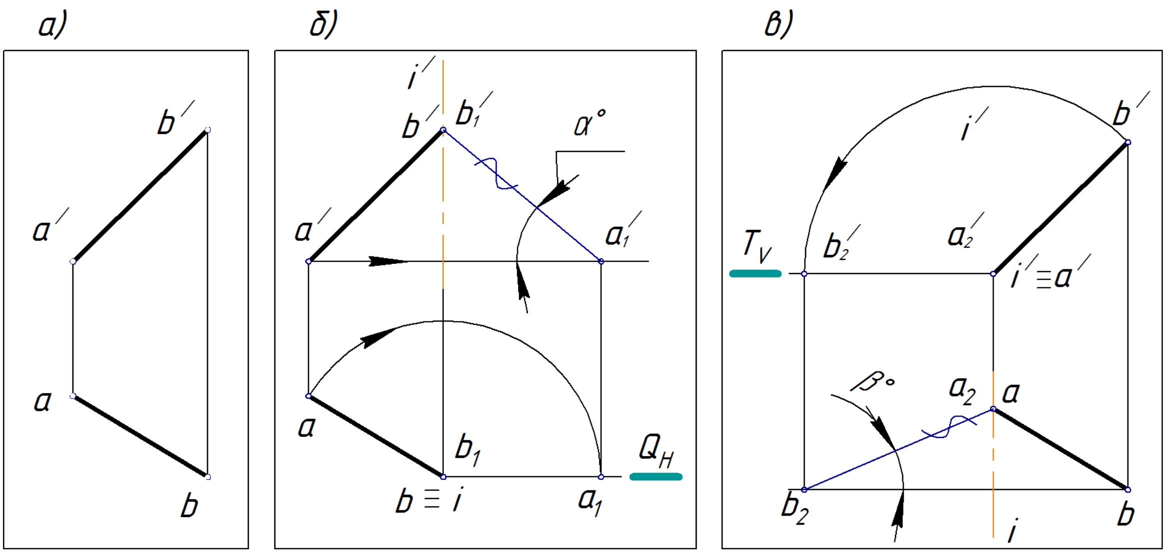


Рисунок 138 – Эпюр, вращение отрезка прямой вокруг оси

III. Вращение плоской фигуры

Способ работает как на проецирующие плоскости вращением плоскости относительно одного из следов, так и на плоскости общего положения вращением вокруг главных линий плоскости (фронтали и горизонтали) до преобразования положения плоскостей уровня.

Пример: проецирующая плоскость, плоскость задана $\Delta ABC = Q$. Требуется преобразовать треугольник в натуральную величину (рис. 139, *а*, 140, *а*).

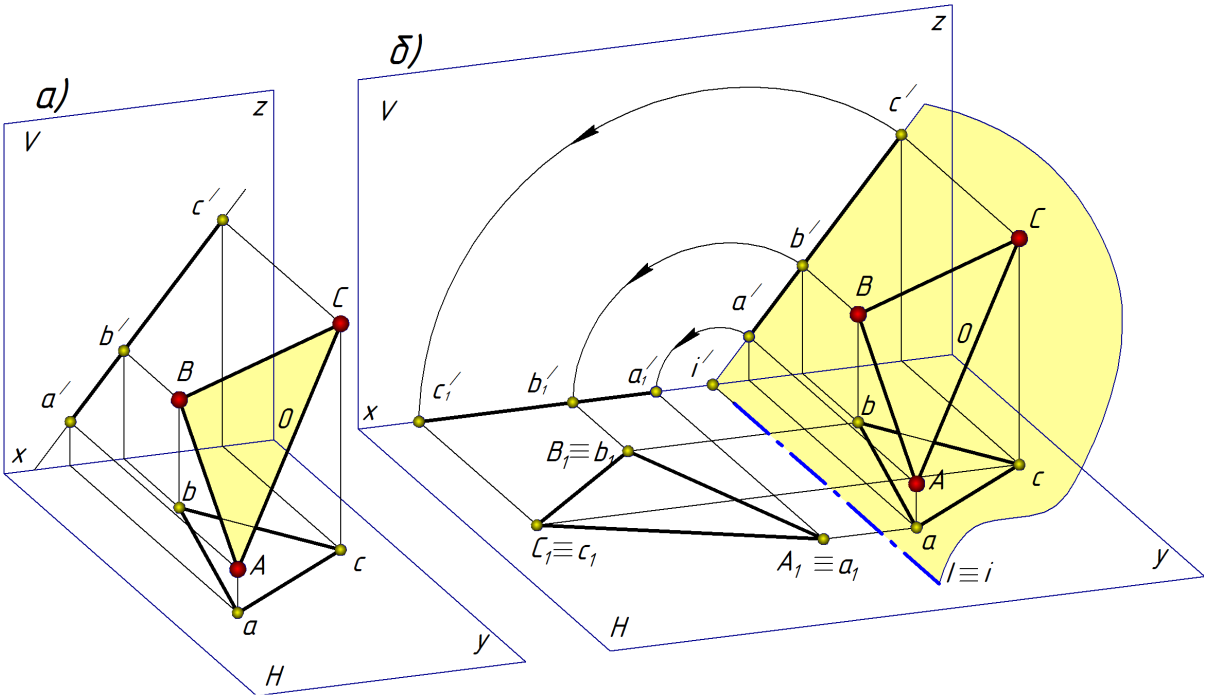


Рисунок 139 – Проецирующий аппарат, вращение плоской фигуры вокруг фронтально-проецирующей прямой l или горизонтального следа плоскости

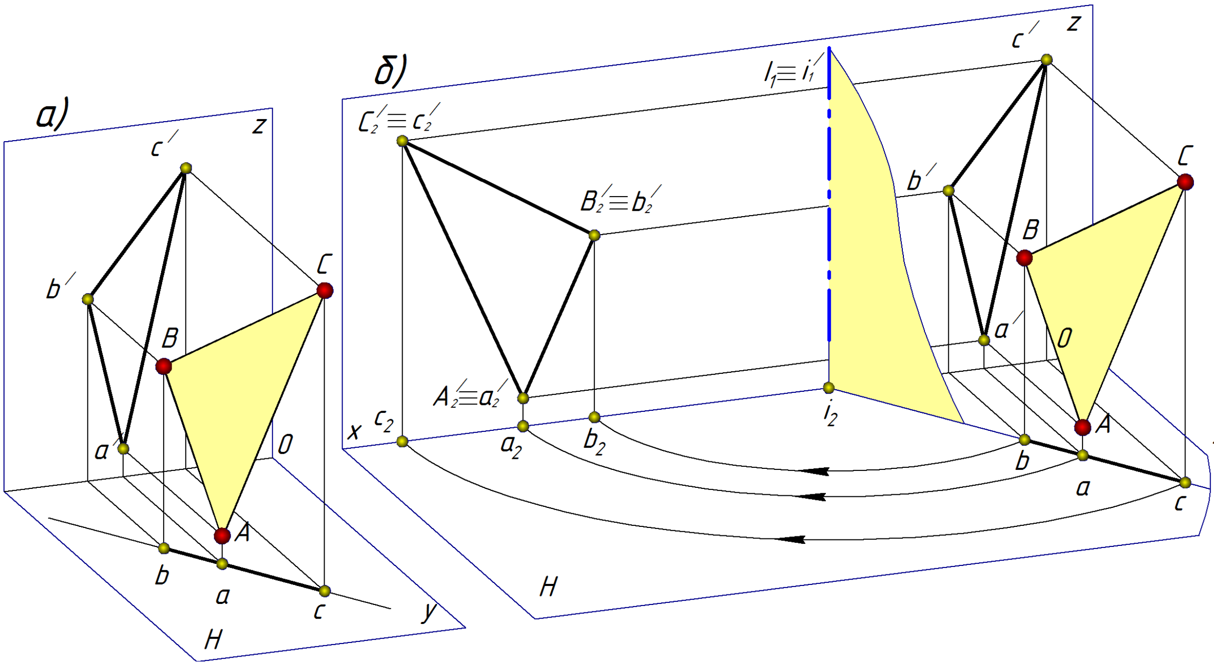


Рисунок 140 – Проецирующий аппарат, вращение плоской фигуры вокруг горизонтально-проецирующей прямой l_1 или фронтального следа плоскости

Если $\underline{Q \perp V}$, плоскость можно преобразовать <u>только</u> в горизонтальную плоскость уровня $Q_2 \parallel H$ и горизонтальная проекция спроецируется без искажения в натуральную величину (рис. 141, *а*).

Если $\underline{Q \perp H}$, плоскость можно преобразовать <u>только</u> во фронтальную плоскость уровня $Q_1 \parallel V$ и фронтальная проекция спроецируется без искажения в натуральную величину (рис. 141, *б*).

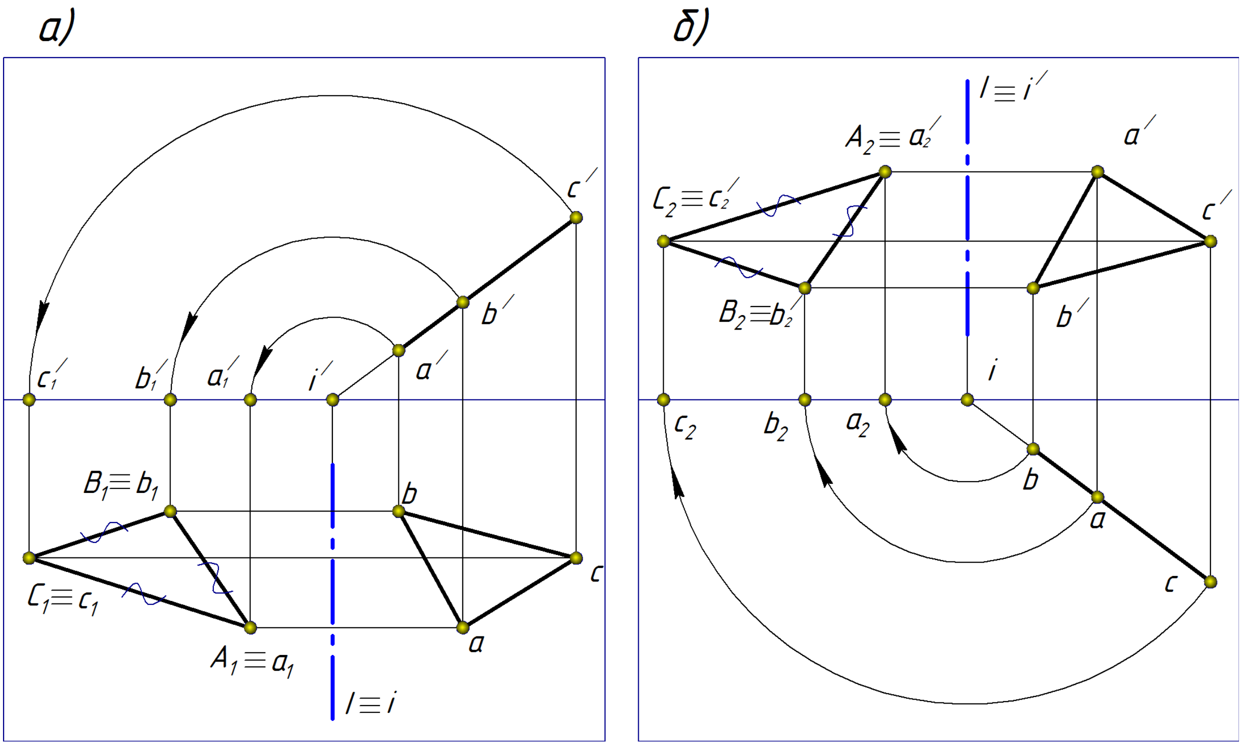


Рисунок 141 – Эпюр, вращение плоской фигуры вокруг оси *I*

Пример: Повернуть плоскость общего положения вокруг фронтали плоскости до положения фронтальной плоскости уровня (рис. 142, 143).

Решение показано на рис. 143:

1 – проводим фронталь плоскости;

2 – проводим линию наклона от точек B и C, зная, что фронтальная проекция линии наклона к фронтальной плоскости проекций всегда перпендикулярна фронтальной проекции фронтали плоскости;

3 – отрезки прямой BO и CO_1 являются радиусами вращения плоскости ΔABC;

4 – способом прямоугольного треугольника определяем натуральную величину радиусов вращения;

5 – откладываем натуральную величину радиуса вращения OB_1 от центра вращения на фронтальной проекции линии наклона плоскости, анологично и для точки C. Сторона BC обязательно пройдет через $(\cdot)1$.

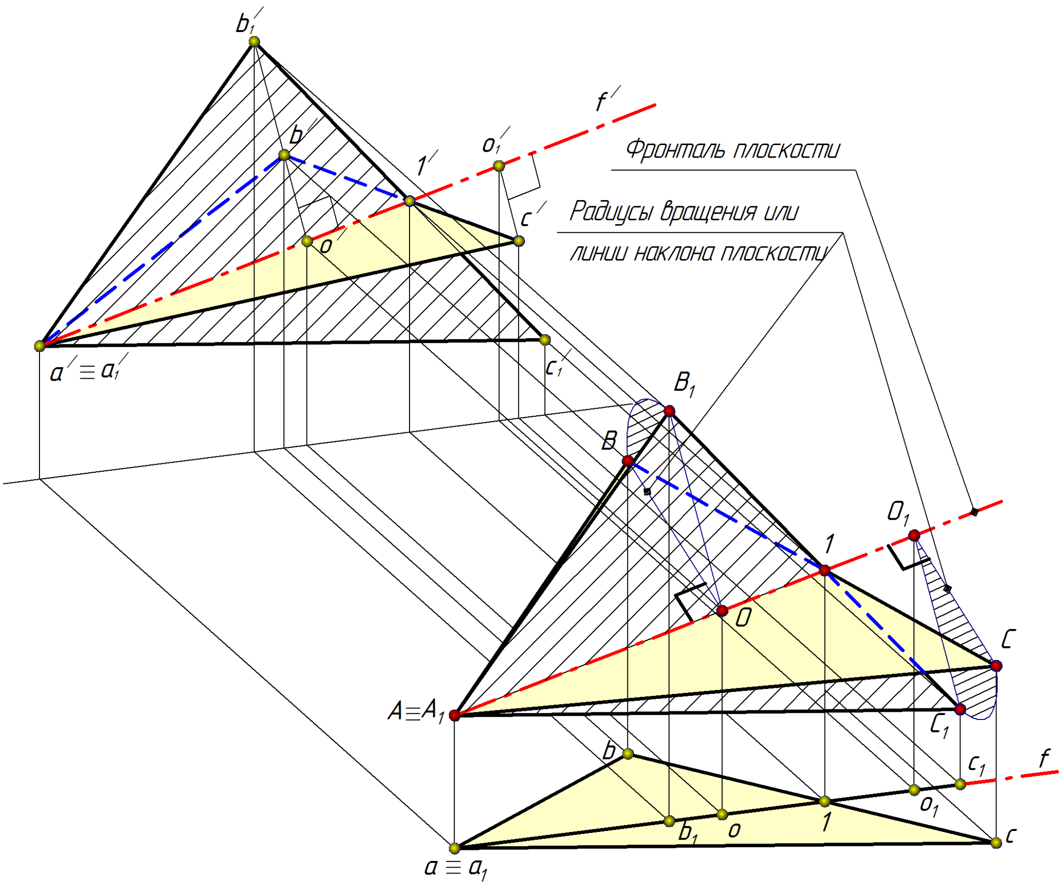


Рисунок 142 – Проецирующий аппарат, вращение плоской фигуры вокруг фронтали плоскости

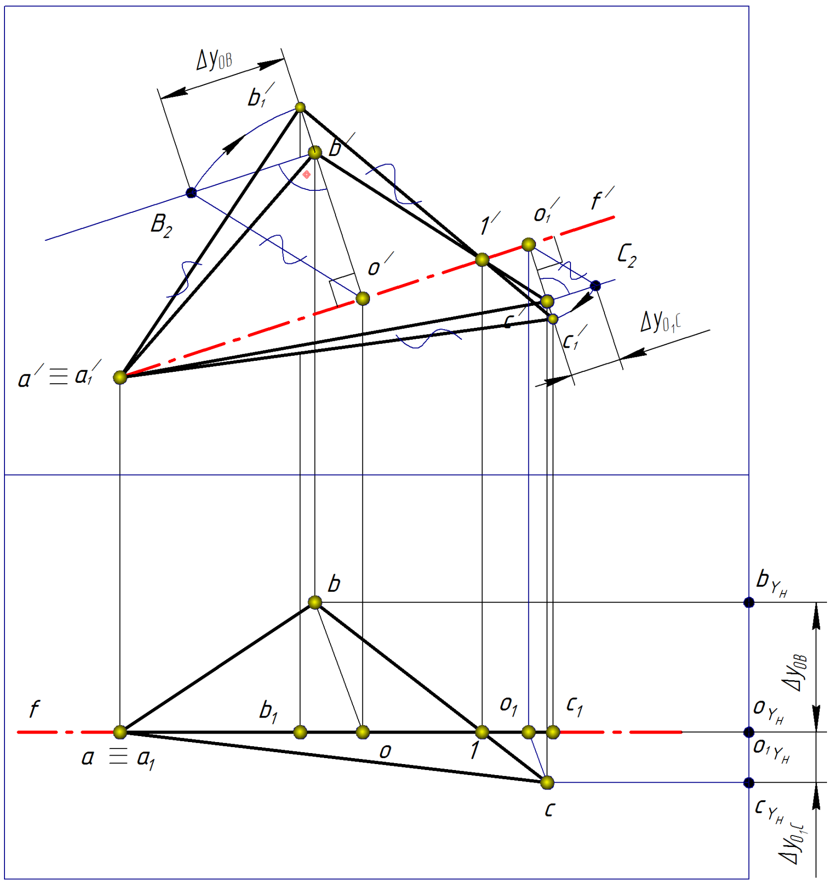


Рисунок 143 – Эпюр, вращение плоской фигуры вокруг фронтали плоскости

Пример: вращение плоскости общего положения вокруг горизонтали плоскости до положения горизонтальной плоскости уровня (рис. 144, 145).

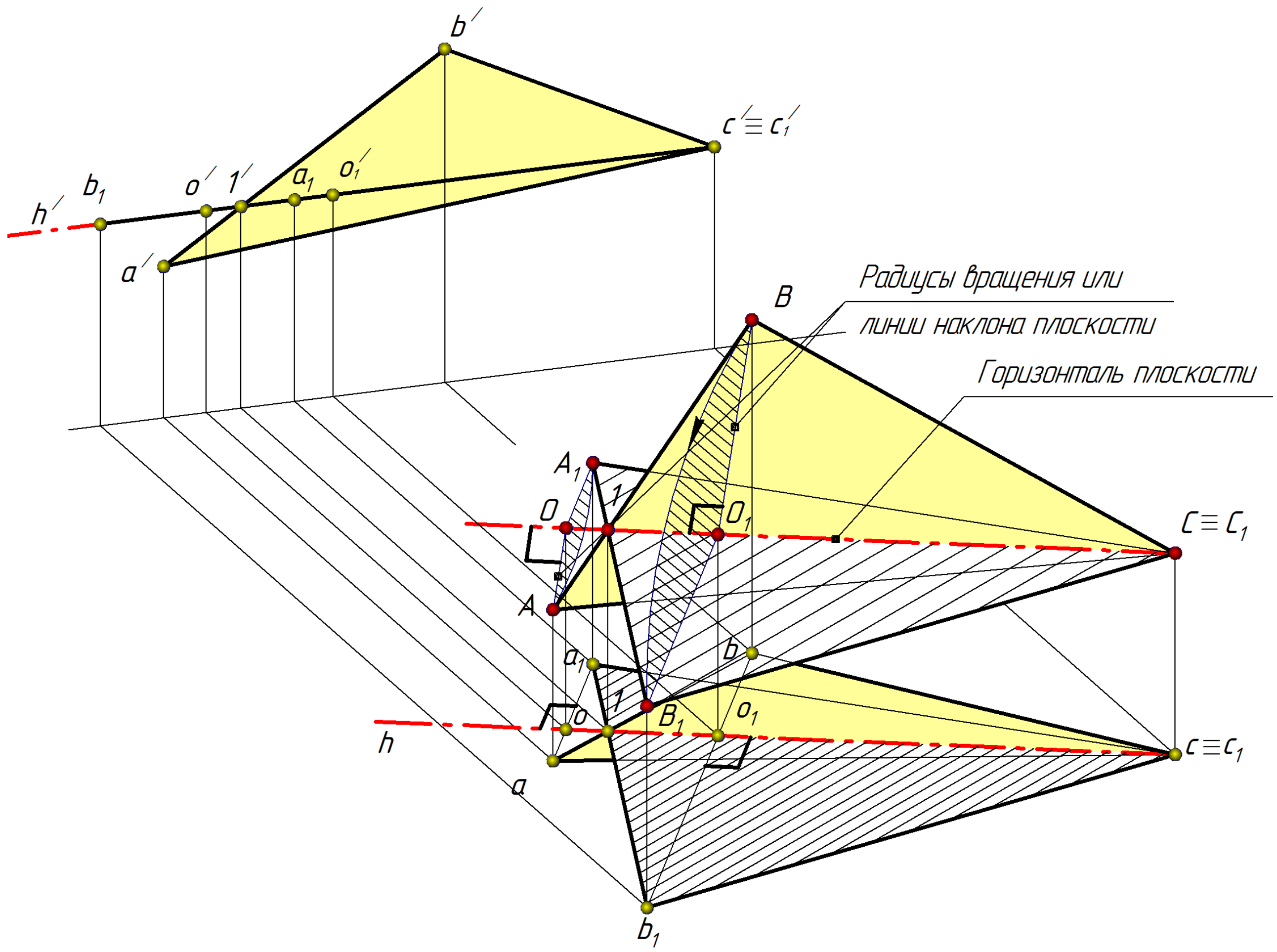


Рисунок 144 – Проецирующий аппарат, вращение плоской фигуры вокруг горизонтали плоскости

Решение, рис. 145:

1 – проводим горизонталь плоскости;

2 – проводим линию наклона от точек B и A, зная, что горизонтальная проекция линии наклона к горизонтальной плоскости проекций всегда перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости;

3 – отрезки прямой BO_1 и AO являются радиусами вращения плоскости ΔABC;

4 – способом прямоугольного треугольника определяем натуральную величину радиусов вращения;

5 – откладываем натуральную величину радиуса вращения BO_1 от центра вращения на горизонтальной проекции линии наклона плоскости, анологично и для точки A. Сторона AB обязательно пройдет через $(\cdot)1$.

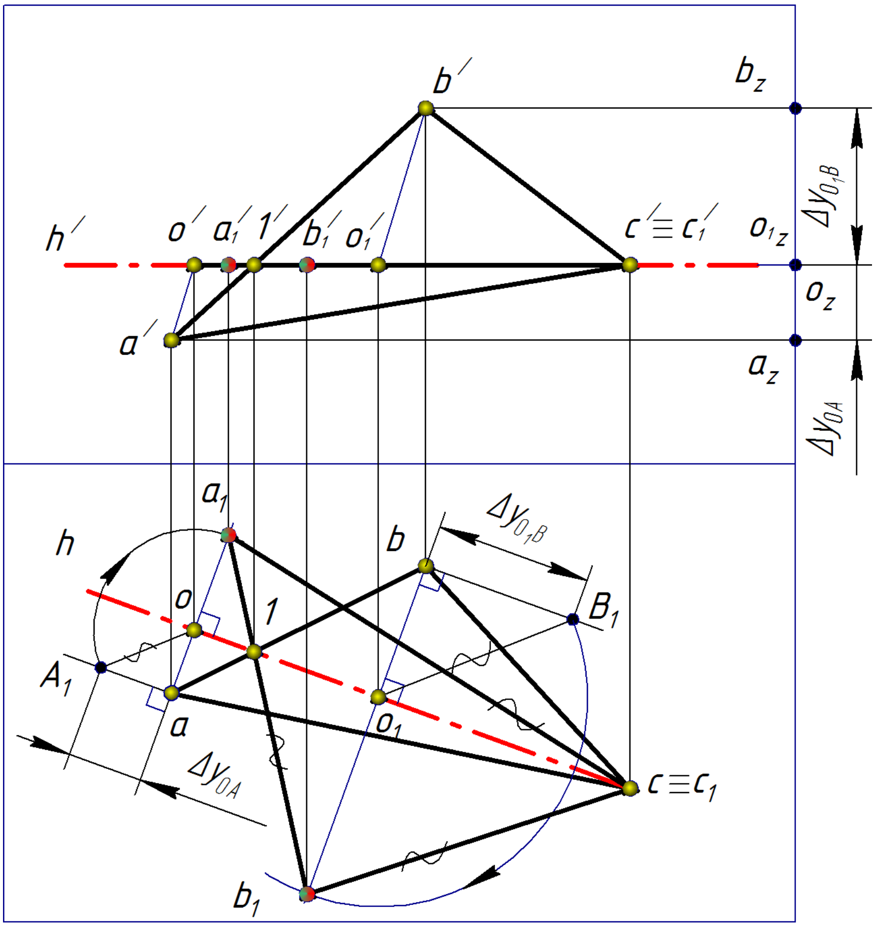


Рисунок 145 – Эпюр, вращение плоской фигуры вокруг горизонтали плоскости

5.3 Способ перемены плоскостей проекций

Способ перемены плоскостей проекций заключается в том, что в проецирующий аппарат вводится новая конструктивная плоскость проекций (V_i, H_i), на которую проецируется данная точка, отрезок, плоская фигура. Новая система плоскостей проекций также взаимно перпендикулярна.

I. Перемена точки

Дан проецирующий аппарат в системе двух плоскостей $x\frac{V}{H}$ и точка A. Требуется ввести новую плоскость проекций. На рис. 146, 147 показана перемена фронтальной плоскости проекций, переходим из системы плоскостей $x\frac{V}{H}$ в систему плоскостей $x_1\frac{V_1}{H}$. Другими словами, Наблюдатель меняет угол взгляда на плоскость проекций, Наблюдатель всегда смотрит на плоскость нормально (перпендикулярно т. к. удален в бесконечную точку от плоскости). По правилам эпюра (в пространстве все плоскости проекций совмещаются в одну плоскость и плоскостью чертежа) плоскость V_1 совмещается с горизонтальной плоскостью проекций H. Эпюр метода показан на рис. 147, *б*. На изображениях видно, что координата z_A точки *A* постоянная, и поэтому на эпюре переносим координату точки на плоскость V_1. $Aa = a^{/}a_x = a_1^{/}a_{x_1}^{/} = z_A$.

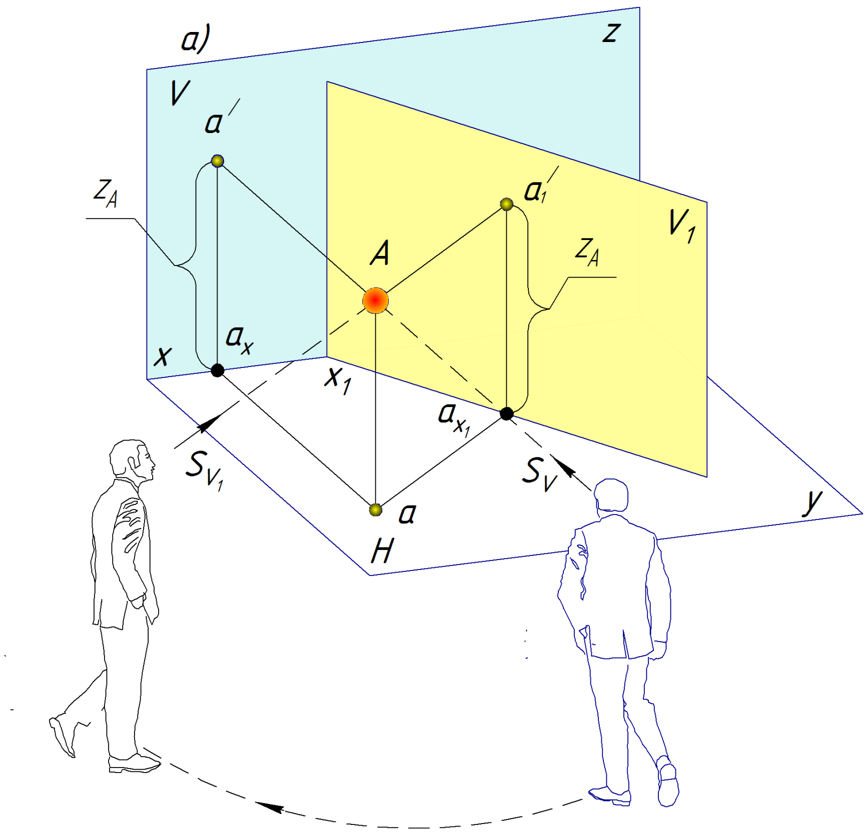


Рисунок 146 – Проецирующий аппарат, перемена точки: S – проецирующий луч

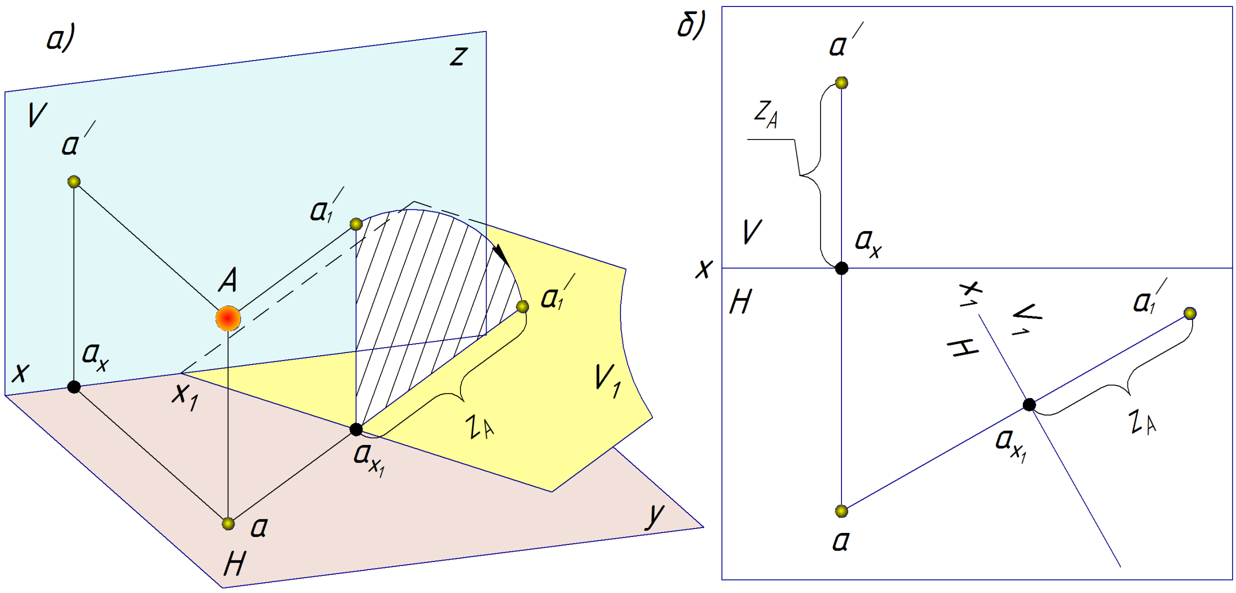


Рисунок 147 – Проецирующий аппарат и эпюр, перемена точки

II. Перемена отрезка прямой

Определить натуральную величину отрезка AB и углы его наклона к плоскостям проекций V и H (рис. 148, 149).

При замене фронтальной плоскости проекций определяем угол наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций – $\angle\alpha^\circ$ (рис. 148). При замене горизонтальной плоскости проекций определяем угол наклона прямой к фронтальной плоскости проекций – $\angle\beta^\circ$ (рис. 149).

Решение.

1 – Перемена фронтальной плоскости проекций. Плоскость V_1 располагаем параллельно отрезку AB в пространстве, рис. 148, *а*, и перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций $V_1 \perp H$.

На эпюре, рис. 148, *б*, проводим ось x_1 параллельно горизонтальной проекции отрезка. По правилам построения эпюра точки: фронтальная и горизонтальная проекция точки всегда лежат на одном перпендикуляре к оси x. На основании правила проводим линии связи всех точек, на пересечении с осью x_1 фиксируем координатные точки a_{x_1} и b_{x_1}. Откладываем координату z точки A $(z_A = a_x a^/)$ и точки B $(z_B = b_x b^/)$ от координатной точки a_{x_1} и b_{x_1} вверх от оси x_1. $a_x a^/ = a_{x_1} a_1^/$; $b_x b^/ = b_{x_1} b_1^/$.

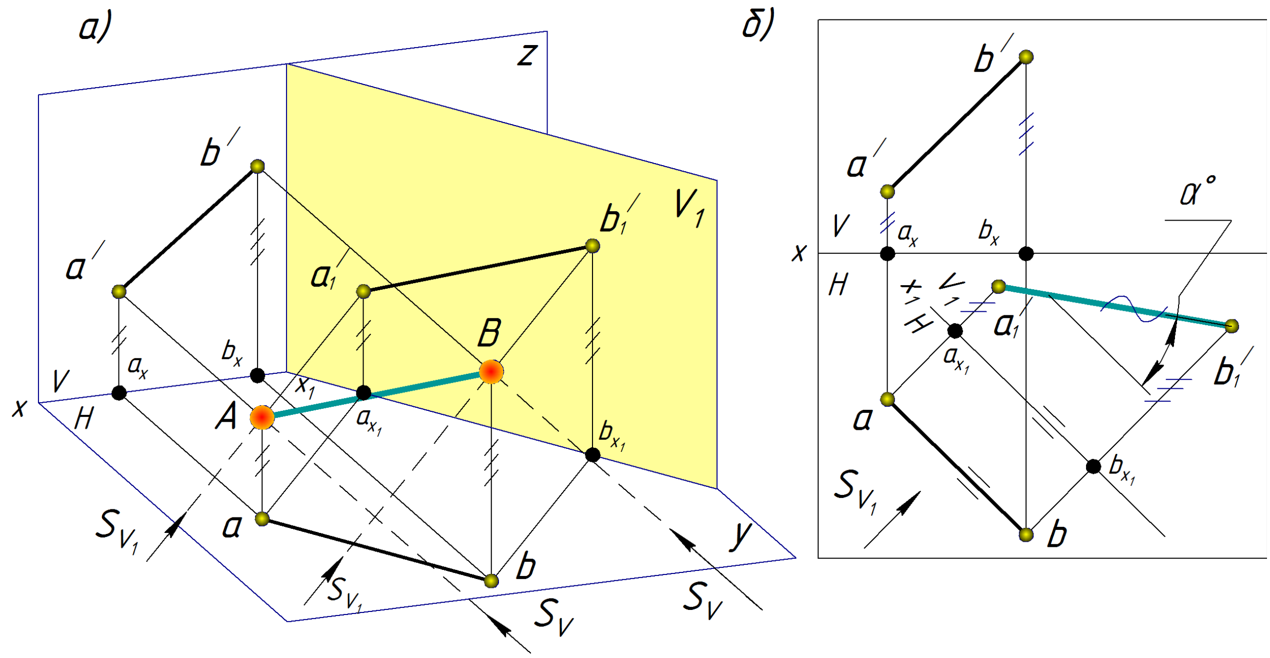


Рисунок 148 – Проецирующий аппарат и эпюр, перемена плоскости проекций

Новая проекция $a_1^/ b_1^/$ отрезка AB спроецируется без искажения в натуральную величину; $\angle\alpha°$ – угол наклона к горизонтальной плоскости проекций.

2 – Перемена горизонтальной плоскости проекций. Плоскость H_1 располагаем параллельно отрезку AB в пространстве, рис. 149, *а*, и перпендикулярно фронтальной плоскости проекций $H_1 \perp V$.

На эпюре, рис. 149, *б*, проводим ось x_1 параллельно фронтальной проекции отрезка. По правилам построения эпюра точки проводим линии связи точек, на пересечении с осью x_1 фиксируем координатные точки a_{x_1} и b_{x_1}. Откладываем координату y точки A $(y_A = a_x a)$ и точки B $(y_B = b_x b)$ от координатной точки a_{x_1} и b_{x_1} вниз от оси x_1. $a_x a = a_{x_1} a_1$; $b_x b = b_{x_1} b_1$.

Новая проекция $a_1 b_1$ отрезка AB спроецируется без искажения в натуральную величину; $\angle\beta°$ – угол наклона к фронтальной плоскости проекций.

По правилам, для того, чтобы решить поставленную, задачу необходимо выполнить как минимум два преобразования.

Пример известен – отрезок прямой AB. Требуется способом перемены плоскостей проекций преобразовать отрезок прямой в проецирующее положение перпендикулярно новой горизонтальной плоскости проекций (рис. 150).

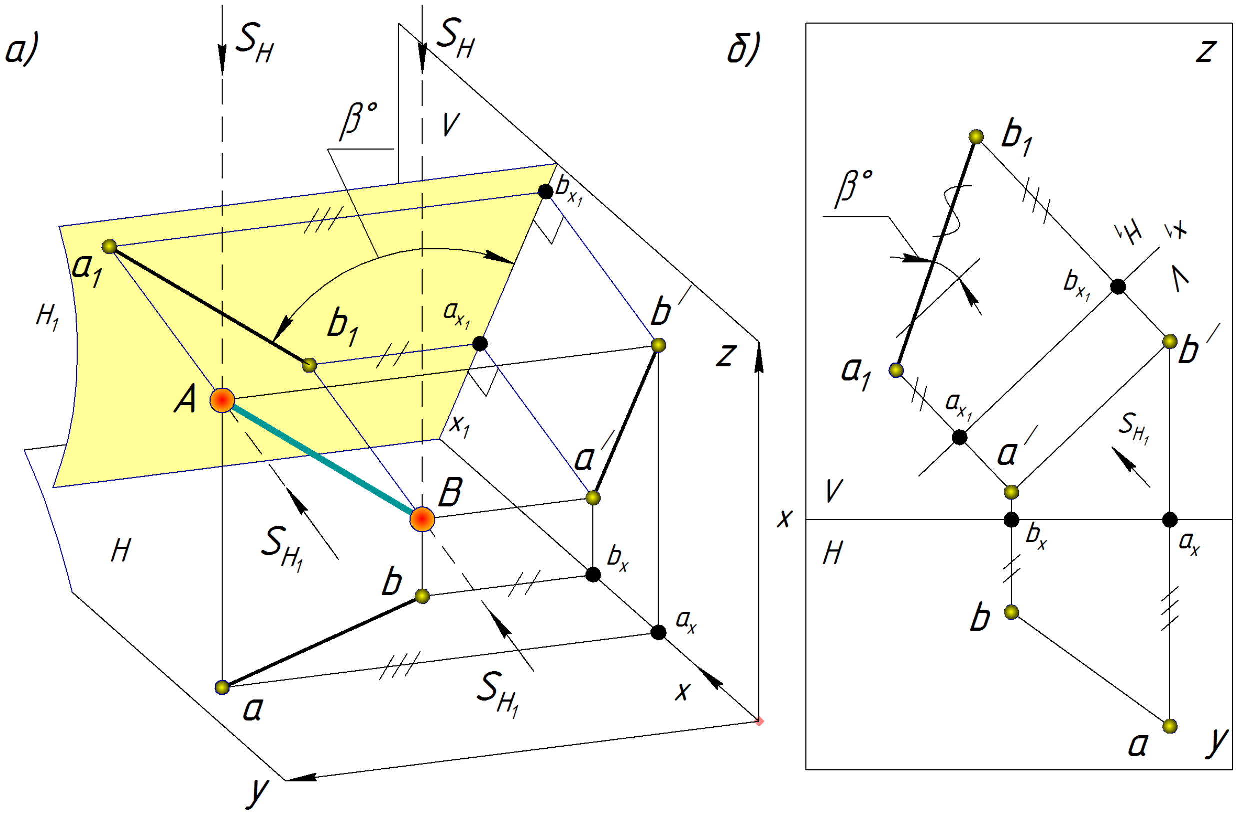


Рисунок 149 – Проецирующий аппарат и эпюр, перемена плоскости проекций

Решение.

1 – Вводим новую ось x_1 параллельно горизонтальной проекции отрезка AB. Переходим из системы плоскостей $x\frac{V}{H} \rightarrow x_1\frac{V_1}{H}$ (рис. 150, *а*). Отрезок прямой AB в новой системе занимает положение фронтальной прямой уровня.

2 – Вводим новую ось x_2 перпендикулярно новой фронтальной проекции отрезка AB. Переходим из системы плоскостей $x_1\frac{V_1}{H} \rightarrow x_2\frac{V_1}{H_1}$ (рис. 150, *б*). Отрезок прямой AB в новой системе занимает положение горизонтально-проецирующей прямой.

Определить расстояние от точки K до прямой AB способом перемены плоскостей проекций.

Решение.

1 – Преобразуем прямую AB общего положения в прямую уровня (рис. 151, *а*). Для этого произвольно перейдем из системы плоскостей $x\frac{V}{H} \rightarrow x_1\frac{V}{H_1}$, проводя новую ось x_1 параллельно фронтальной проекции отрезка AB. $x_1 \parallel a'b' \rightarrow AB \parallel H_1$.

2 – На основании теоремы о проецировании прямого угла в новой системе от точки k_1 опускаем перпендикуляр к a_1b_1, т. к. угол проецируется без искажения. На

пересечении проекций перпендикуляра с проекцией прямой a_1b_1 фиксируем точку m_1.

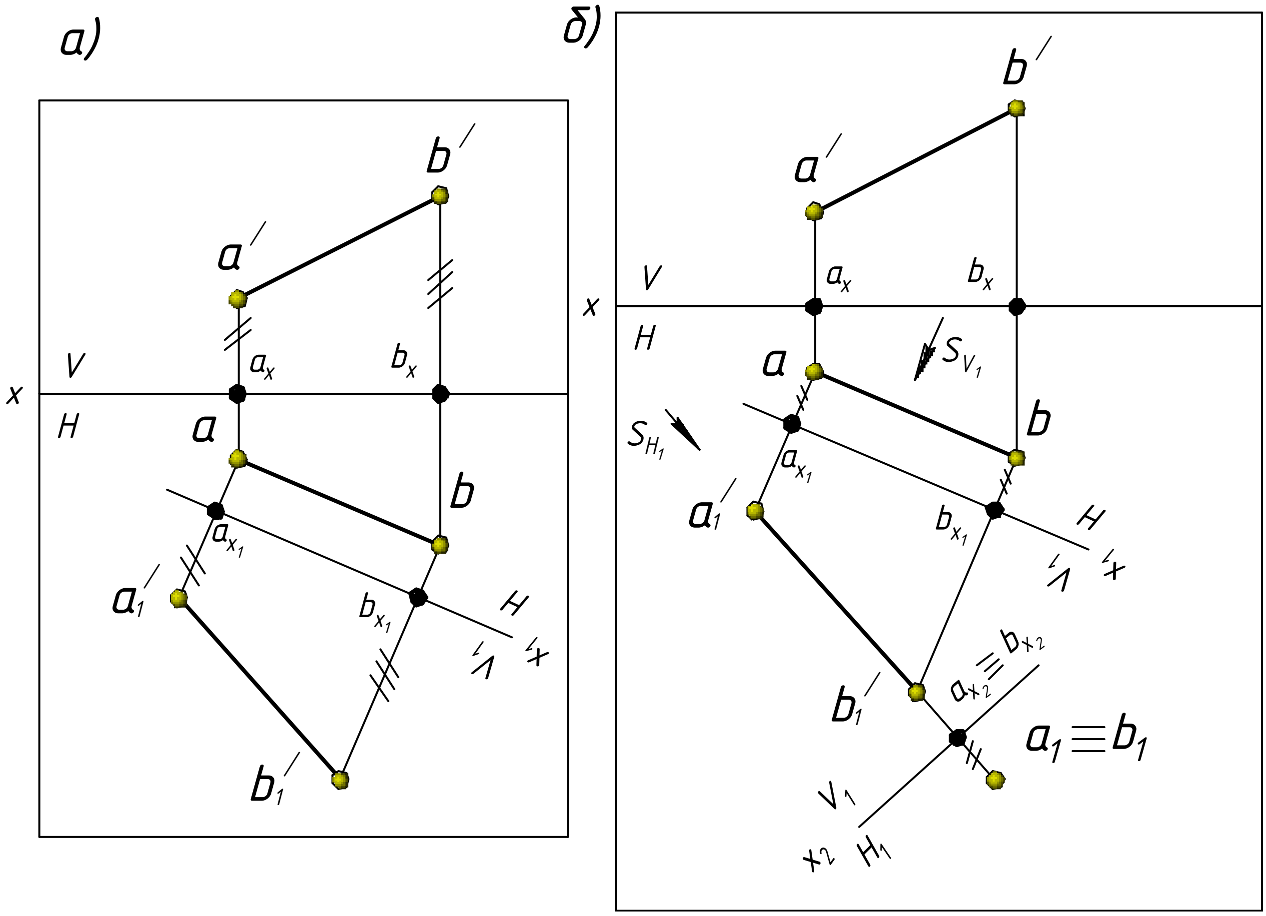


Рисунок 150 – Эпюр, перемена плоскостей проекций

3 – Получившийся отрезок KM является кратчайшим расстоянием от точки до прямой. Но проекции не дают натуральную величину отрезка, и поэтому требуется еще одно преобразование (графически можно определить натуральную величину отрезка любым из выше перечисленных способов).

Рассмотрим способ перемены плоскостей проекций (рис. 151, *б*). Для этого произвольно перейдем в систему плоскостей из $x\frac{V}{H} \rightarrow x_1\frac{V_1}{H}$, проводя новую ось x_2 параллельно горизонтальной проекции отрезка AB. $x_2 \parallel km \rightarrow KM \parallel V_1$. В новом положении отрезок преобразуется в прямую уровня (фронталь).

III. Перемена плоской фигуры

Определить натуральную величину треугольника ΔABC и $\angle\alpha°$ – угол наклона к горизонтальной плоскости проекций (рис. 152).

Решение.

1 – Проводим горизонталь плоскости (нужна для задания оси координат).

2 – Проводим ось x_1 в системе плоскостей $\frac{V_1}{H}$. Плоскость по положению – фронтально-проецирующая (рис. 152, *а*).

3 – Проводим ось x_2 в системе плоскостей $\frac{V_1}{H_1}$. Плоскость по положению – горизонтальная плоскость уровня (рис. 152, *б*).

Пример. Пусть плоскость Q задана следами. Требуется преобразовать плоскость в проецирующее положение и определить углы наклона к плоскостям проекций (рис. 153).

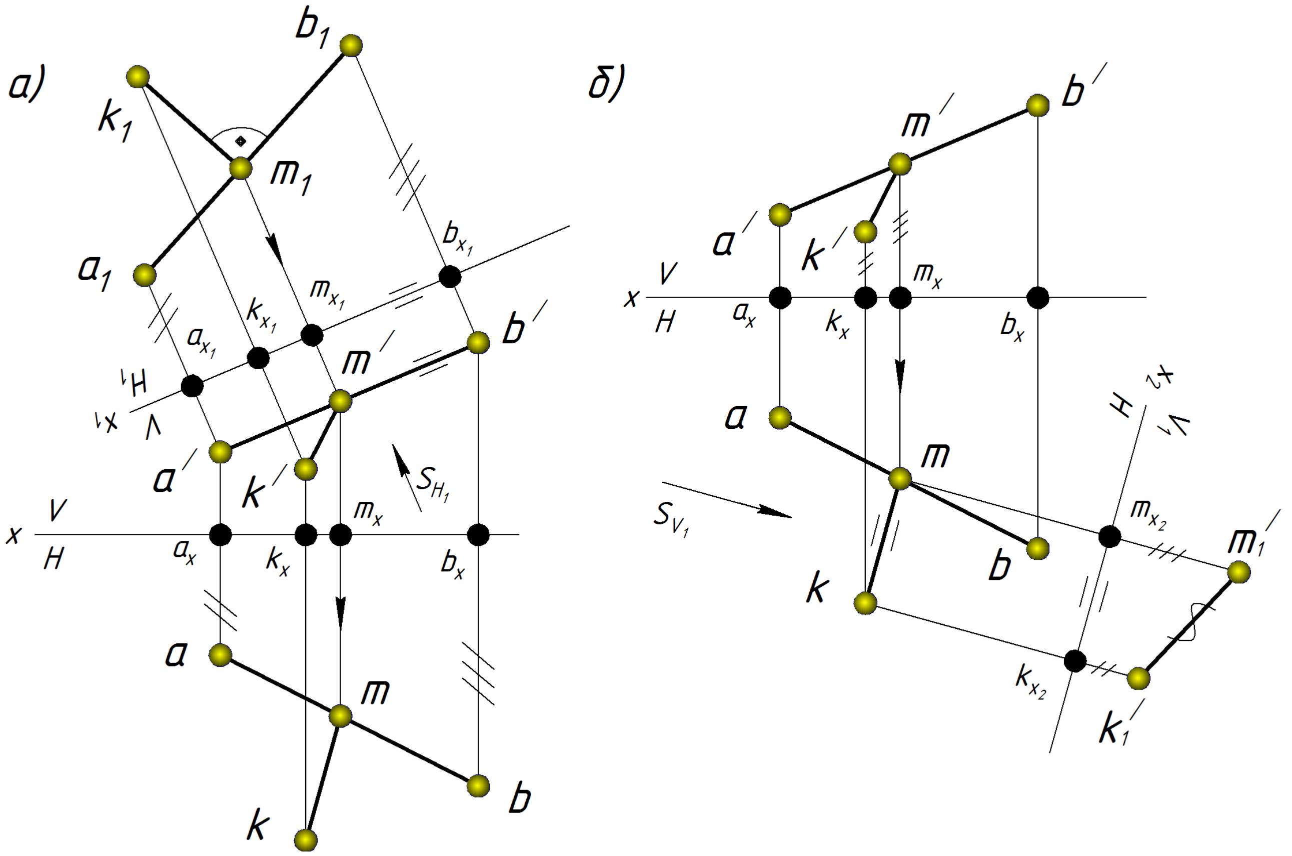


Рисунок 151 – Эпюр, перемена плоскостей проекций

Решение.

1 – Преобразование во фронтально-проецирующую плоскость (рис. 153, *а*). Для этого произвольно проводим горизонталь плоскости, находим проекции следа горизонтали плоскости точка M. Ось проводим перпендикулярно горизонтальному следу Q_H плоскости Q или горизонтальной проекции горизонтали h. От горизонтальной проекции m_1 фронтального следа горизонтали плоскости откладываем координату z точки M. $mm' = m_1m_1'$. Соединив две точки m_1' и Q_{x_1}, получаем фронтальный след плоскости Q_{V_1}. Угол $\angle\alpha°$ – угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций.

2 – Преобразование в горизонтально-проецирующую плоскость (рис. 153, *б*). Ход выполнения аналогичен с фронтально-проецирующей плоскостью, только проводим фронталь плоскости, а не горизонталь, след прямой точка N. Угол $\angle\beta°$ – угол наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций.

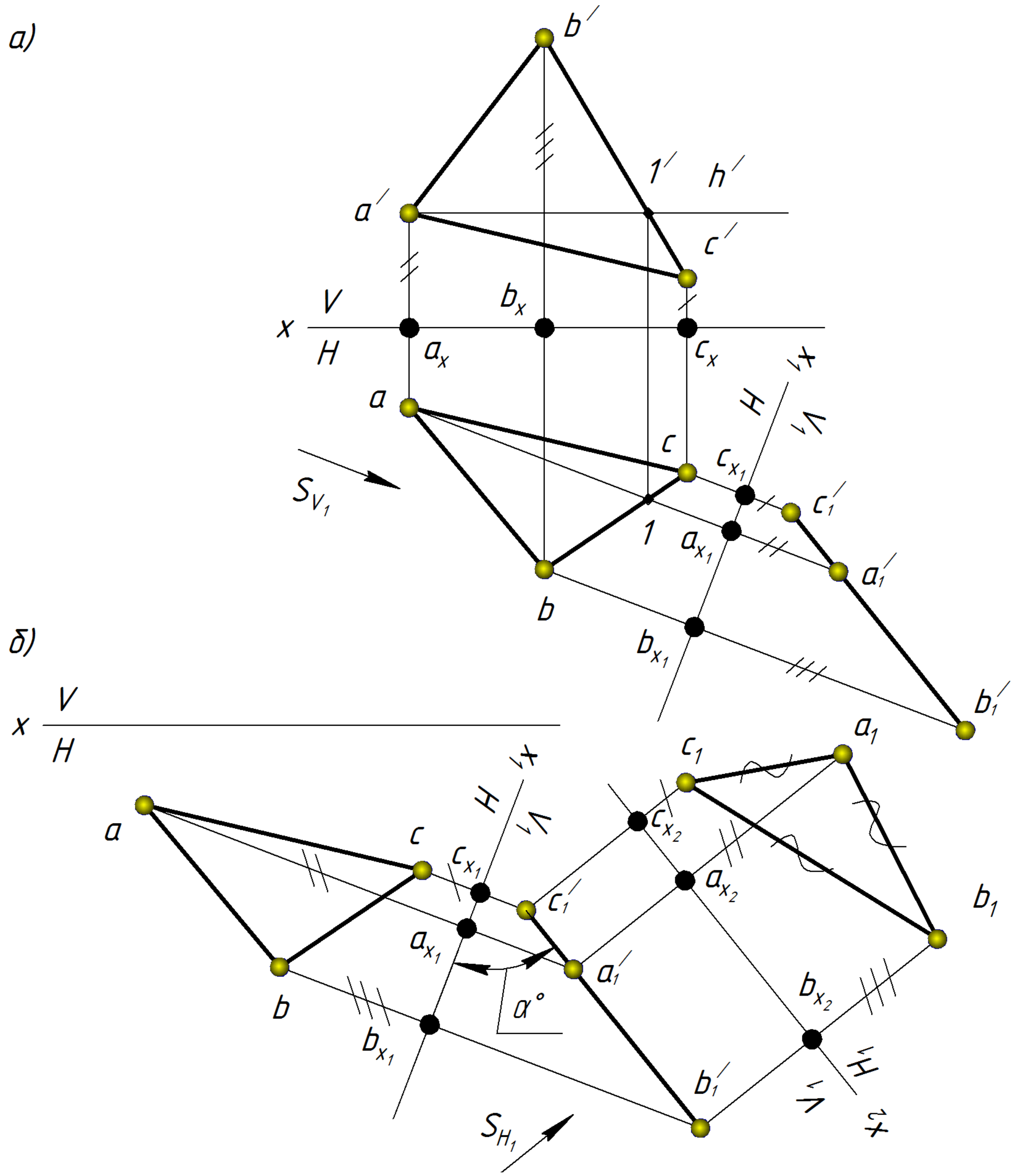


Рисунок 152 – Эпюр, перемена плоскостей проекций

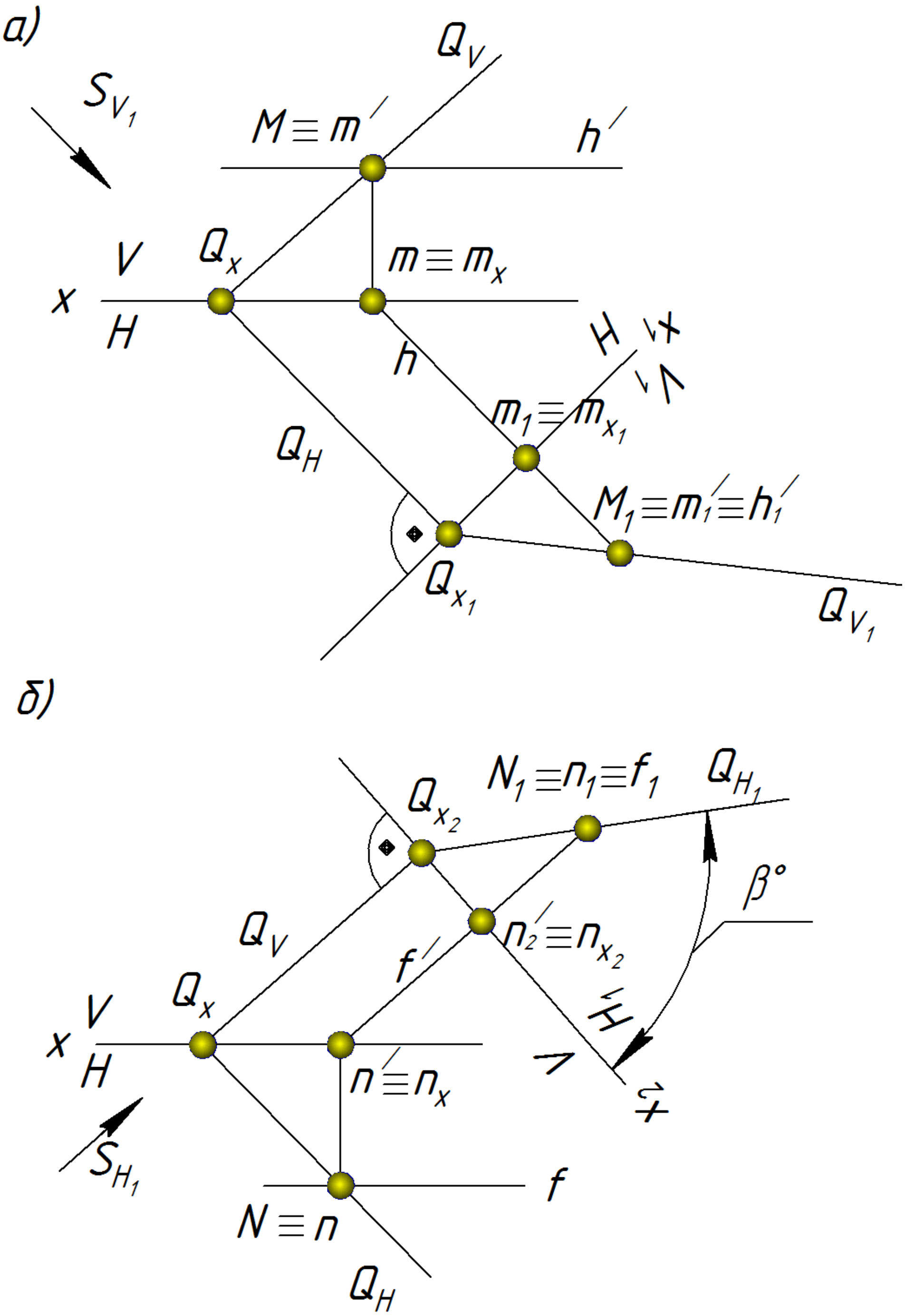


Рисунок 153 – Эпюр, перемена плоскостей проекций

5.4 Способ плоскопараллельного перемещения

Способ основан на перемещении проекции точки, прямой, плоскости, объемной фигуры, до положения необходимого для решения поставленной задачи.

I Перемещение точки

При перемещении точки соблюдается условие, что ее одна координата остается постоянной, а две другие координаты меняются.

Пусть координата z точки A постоянная, тогда координаты x и y точки займут новое положение (рис. 154, *а*) ($z = const$).

Пусть координата y точки A постоянная, тогда координаты x и z точки займут новое положение (рис. 154, *б*) ($y = const$).

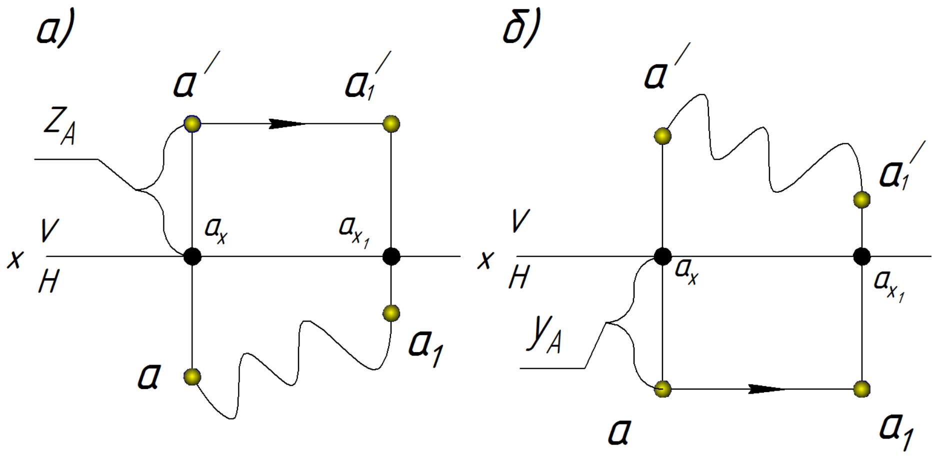


Рисунок 154 – Эпюр, перемещение точки

II. Перемещение прямой

Условие $z = const$, значит, отрезок прямой перемещается параллельно горизонтальной плоскости проекций, $\angle\alpha°$ – угол наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций не изменяется и, следовательно, не изменяется длина горизонтальной проекций отрезка (рис. 155 *а, б*).

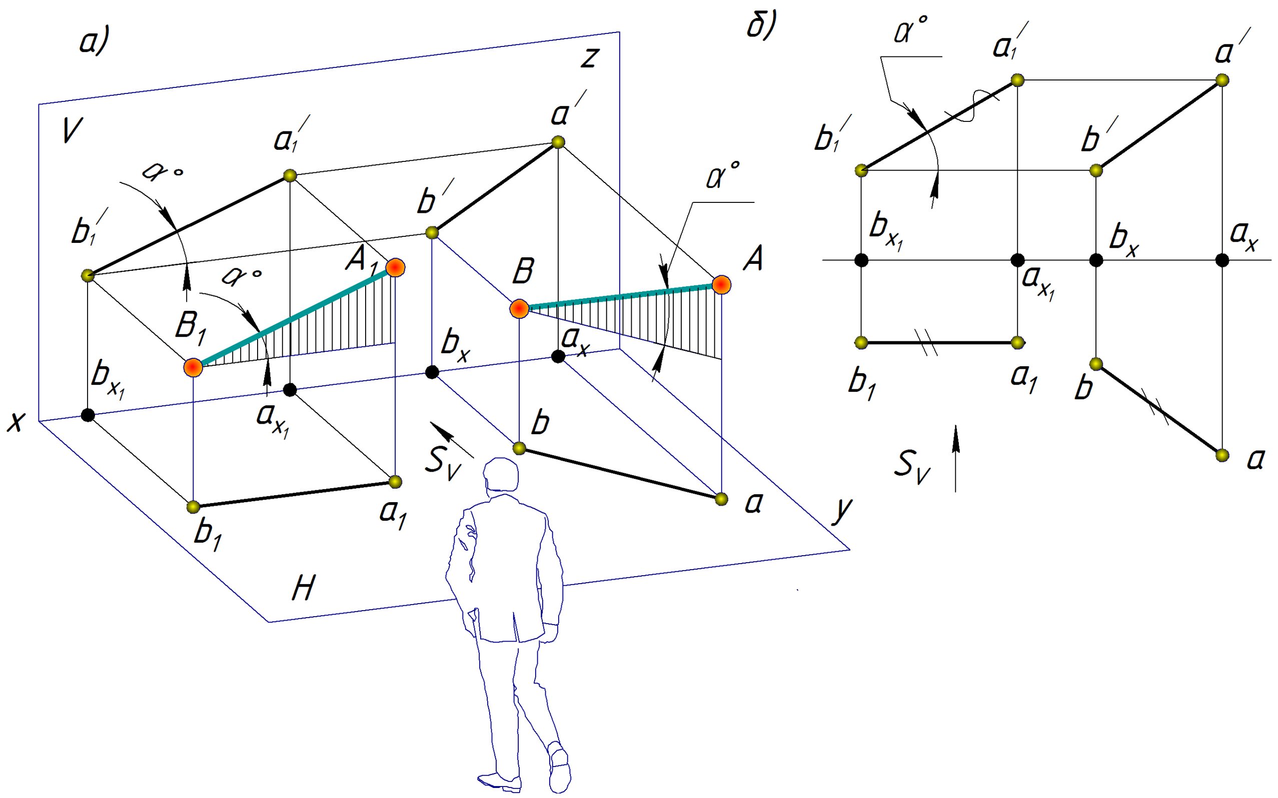


Рисунок 155 – Проецирующий аппарат и эпюр, перемещение прямой

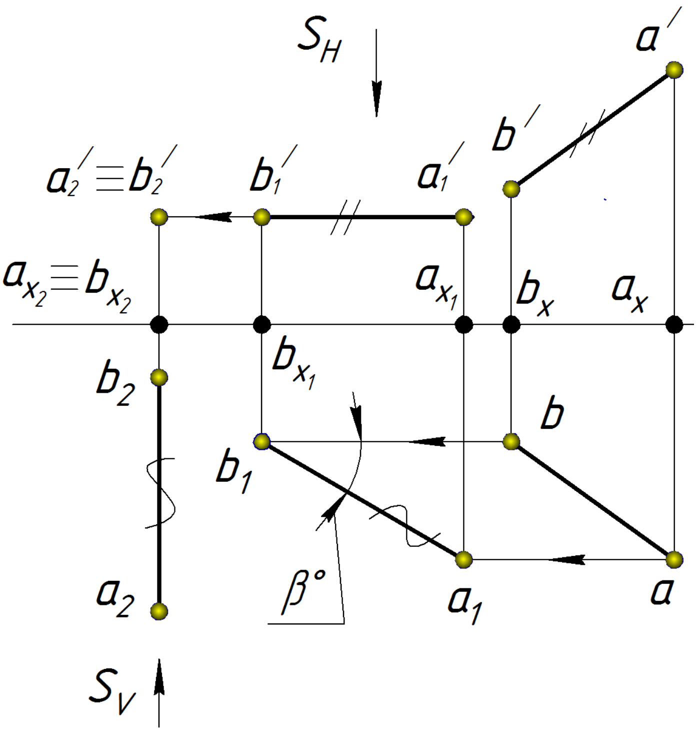


Рисунок 156 – Эпюр, перемещение прямой

Условие $y = const$, значит, отрезок прямой перемещается параллельно фронтальной плоскости проекций, $\angle\beta°$ – угол наклона прямой к фронтальной плоскости проекций не изменяется и, следовательно, не изменяется длина фронтальной проекций отрезка (рис. 156).

$$a_x a = a_{x_1} a_1$$

$$b_x b = b_{x_1} b_1$$

Так же общее положение отрезка прямой можно преобразовать в проецирующее положение.

III. Перемещение плоскости

Плоскость перемещают как в проецирующее положение, так и в плоскость уровня.

Плоскость общего положения преобразовывают в проецирующую плоскость.

Проецирующую плоскость преобразовывают в плоскость уровня.

Каждая точка плоскости перемещается параллельно плоскости проекций, угол наклона и одна координата точки плоскости к плоскости проекций не изменяются.

Пример. Пусть известна плоскость треугольника ΔABC общего положения. Определить истинный вид треугольника ΔABC и углы наклона к плоскостям проекций (рис. 157, 158).

Плоскость ΔABCпреобразуем в проецирующее положение.

Решение.

1 – Для примера плоскость ΔABC преобразуем во фронтально-проецирующую плоскость. Проводим горизонталь плоскости, строим проекции прямой (рис. 157, *а*). Горизонтальную проекцию треугольника ΔABC перемещаем (копируем) в удобное место так, чтобы горизонтальная проекция горизонтали плоскости располагалась перпендикулярно оси x. $h_1 \perp x$, рис. 157, *б*. Горизонтальную проекцию строим методом триангуляции. Координаты точек плоскости треугольника ΔABC $z - const$, фронтальная проекция преобразованной части займет проецирующее положение. Другими словами, получаем фронтальный след плоскости, который дает угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций, угол $\angle\alpha°$.

2 – Определим истинный вид треугольника *ABC*. В преобразованной части проекции треугольника плоскость проецируется во фронтальную плоскость проекций $y - const$. Перемещаем фронтальный след плоскости, располагая его параллельно оси x (рис. 157, *в*). Плоскость ΔABC преобразуется в горизонтальную плоскость

уровня. Горизонтальная проекция плоскости проецируется без искажения в натуральную величину.

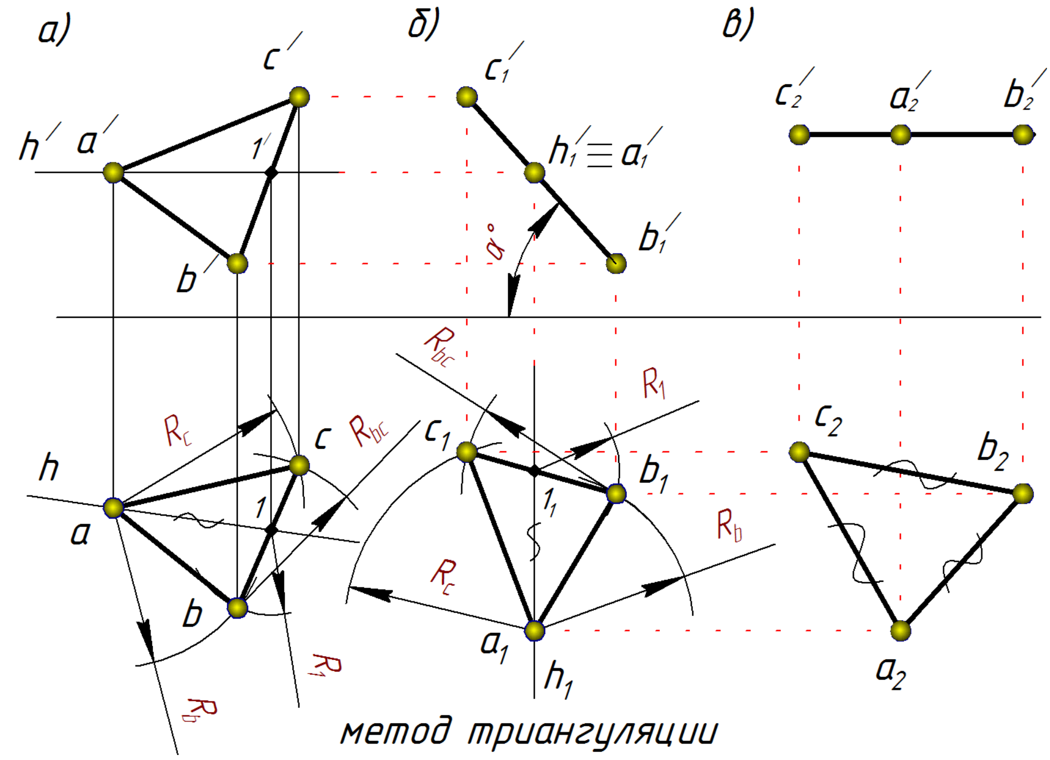


Рисунок 157 – Эпюр, перемещение плоскости

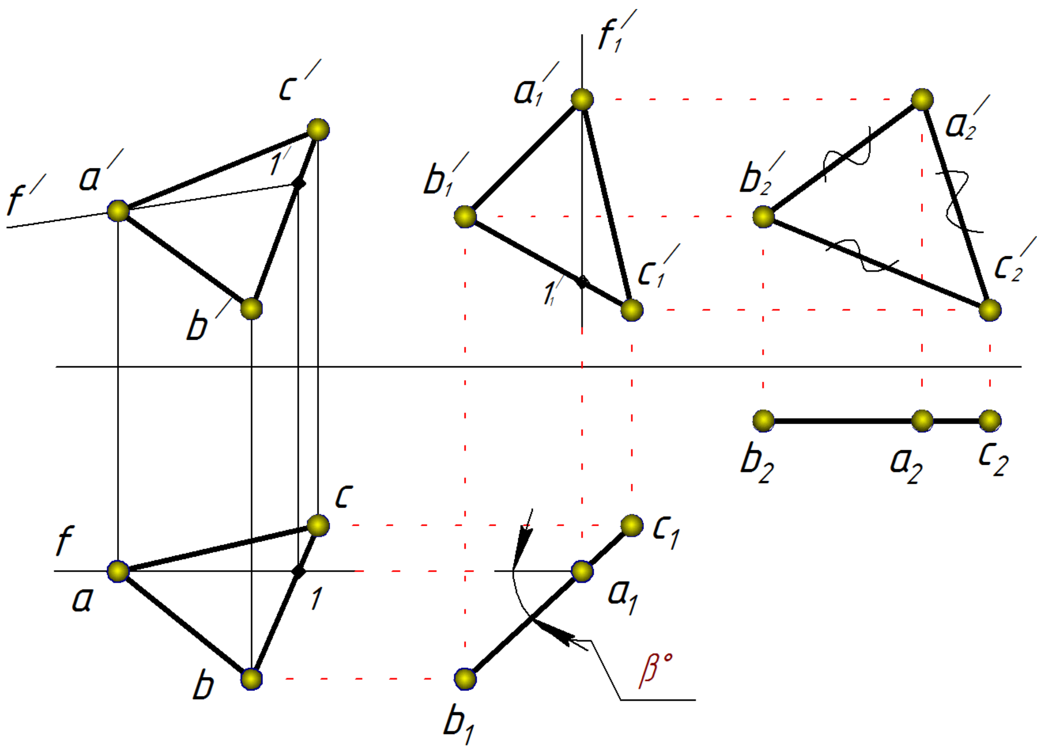


Рисунок 158 – Эпюр, перемещение плоскости

3 – Аналогично решению 1, 2 преобразуем плоскость общего положения в горизонтально-проецирующую плоскость затем в плоскость уровня. Проводим фронталь плоскости, методом триангуляции стоим фронтальную проекцию (рис. 158).

Плоскость задана следами, рис. 159, *а*, 160, *а*. Определим углы наклона плоскости к плоскостям проекций.

Решение.

1 – Преобразуем плоскость Q во фронтально-проецирующую плоскость, $\angle\alpha^\circ$ – угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций (рис. 159, *б*). $z = const$.

2 – Преобразуем плоскость Q в горизонтально-проецирующую плоскость, $\angle\beta^\circ$ – угол наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций (рис. 160, *б*). $y = const$.

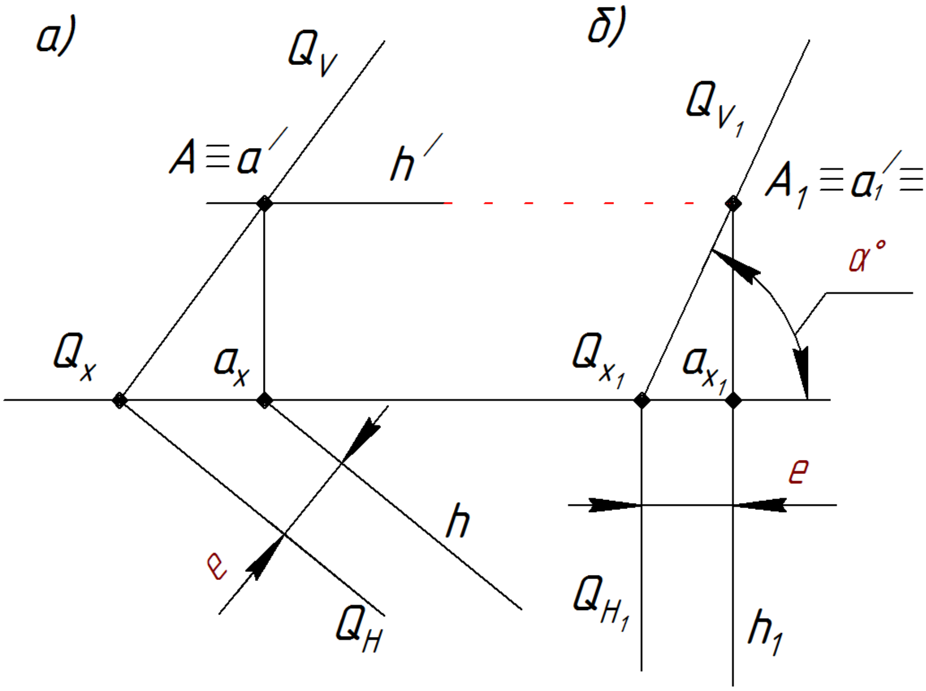


Рисунок 159 – Эпюр, перемещение плоскости

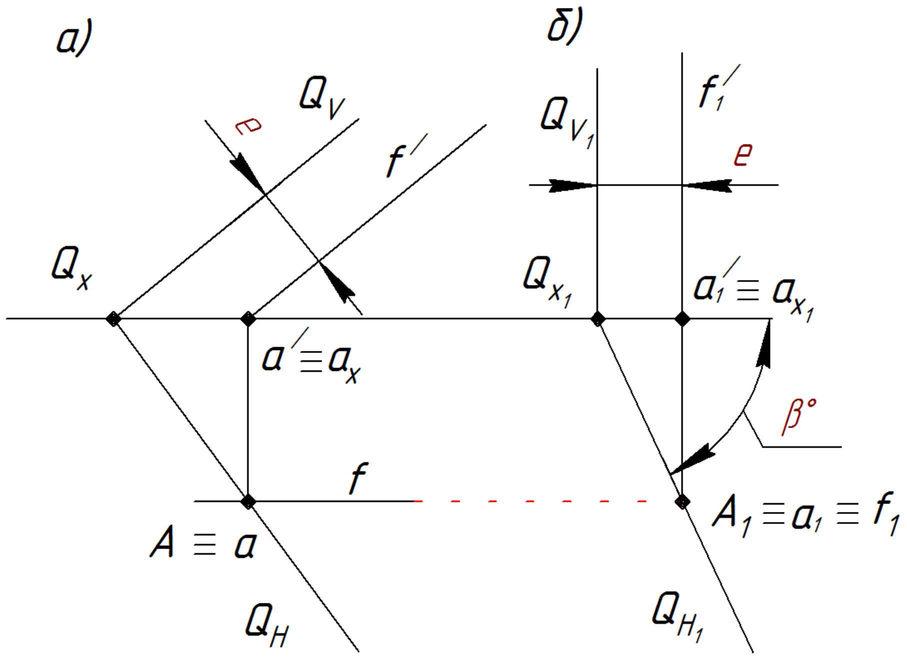


Рисунок 160 – Эпюр, перемещение плоскости

IV. Перемещение объемной фигуры

Дана треугольная пирамида $SABC$, рис. 161, *а*. Определить высоту фигуры.

Решение.

1 – Преобразуем основание пирамиды ΔABC из общего в проецирующее положение (рис. 161, *б*).

2 – От точки s_1 восстановим перпендикуляр к плоскости основания. Отрезок перпендикуляра к плоскости OS является высотой пирамиды, а горизонтальная проекция высоты o_1s_1 дает натуральную величину отрезка, т. к. отрезок O_1S_1 по положению является горизонтальной прямой уровня.

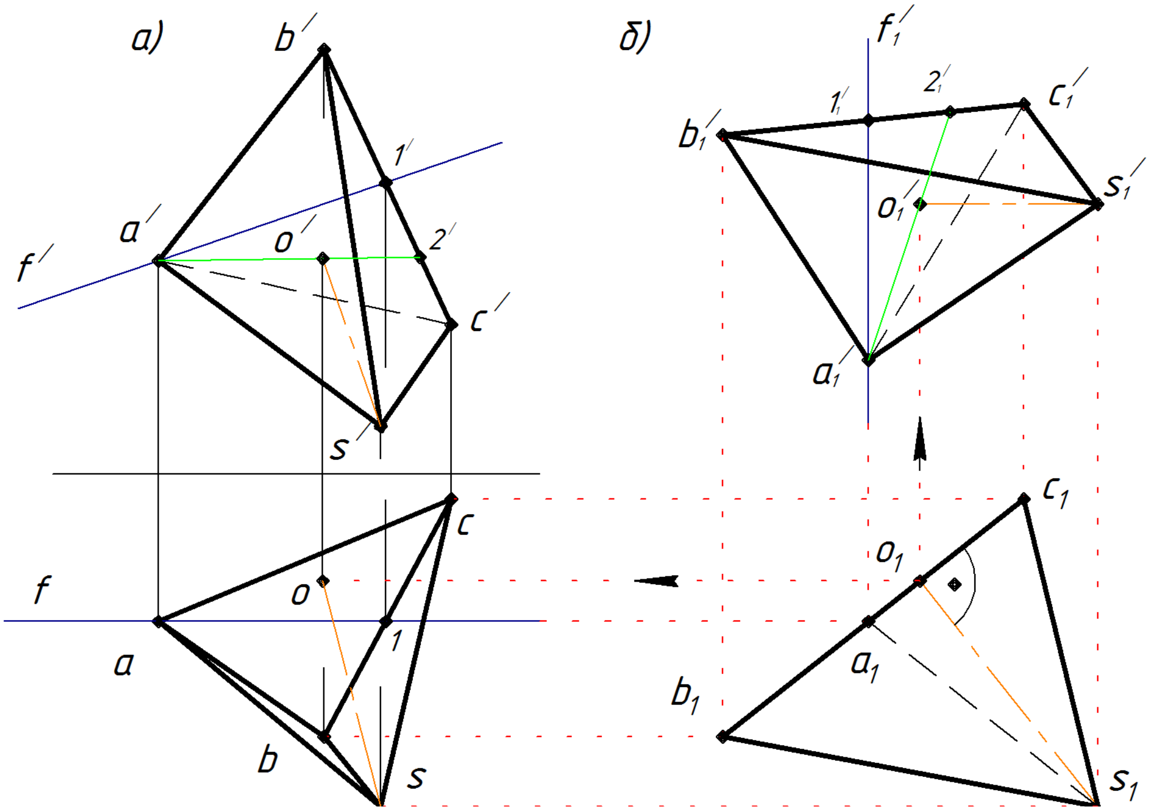


Рисунок 161 – Эпюр, перемещение объемной фигуры

Проекции точки O строим переносом от преобразованной фронтальной проекции основания пирамиды к изначальной фронтальной проекции основания. Проводим проекцию отрезка $a_1^{/}2_1^{/}$ через точку $o_1^{/}$. Прямую переносим в изначальную проекцию основания отрезка $a^{/}2^{/}$ методом триангуляции. Горизонтальную проекцию точки определяем, опустив линии связи от точек $o^{/}$ и o_1.

5.5 Способ совмещения

Сущность способа в том, что плоскость, заданную следами, вращают вокруг одного из следов этой плоскости до совмещения с соответствующей плоскостью проекций. Плоская фигура, отрезок, лежащие в заданной плоскости, в совмещении с плоскостью проекций дают натуральную величину изображения. Когда плоскость задана проецирующей, способ совмещения называют способом вращения, но в частном случае, рис. 162, 163.

Требование: способу совмещения всегда требуются следы плоскости.

I. Вращение вокруг горизонтального следа плоскости (рис. 162).

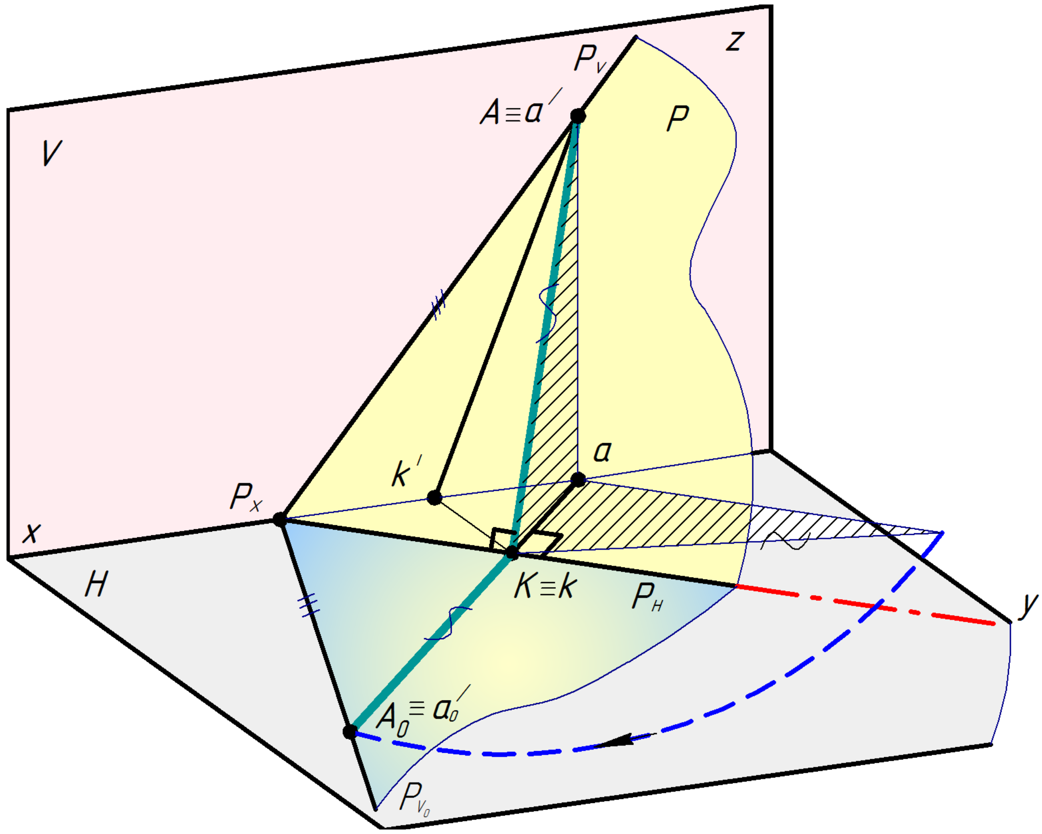


Рисунок 162 – Проецирующий аппарат, способ совмещения

При совмещении плоскости **P** с горизонтальной плоскостью проекций линия ската и фронтальный след плоскости дают истинный вид, натуральную величину прямых. Линия ската является радиусом вращения при совмещении с горизонтальной плоскостью проекций, эпюра, рис. 163.

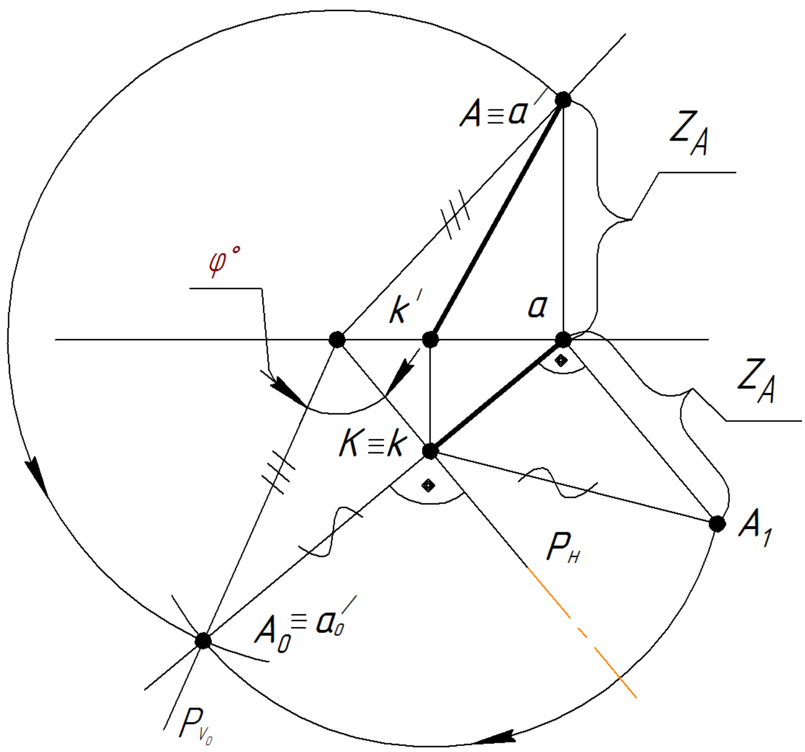


Рисунок 163 – Эпюр, способ совмещения: φ^0 – угол, образованный следами плоскости

Пример. Известны плоскость общего положения и отрезок прямой CD, лежащий в плоскости P (рис. 164, *а*). Требуется определить истинный вид отрезка CD.

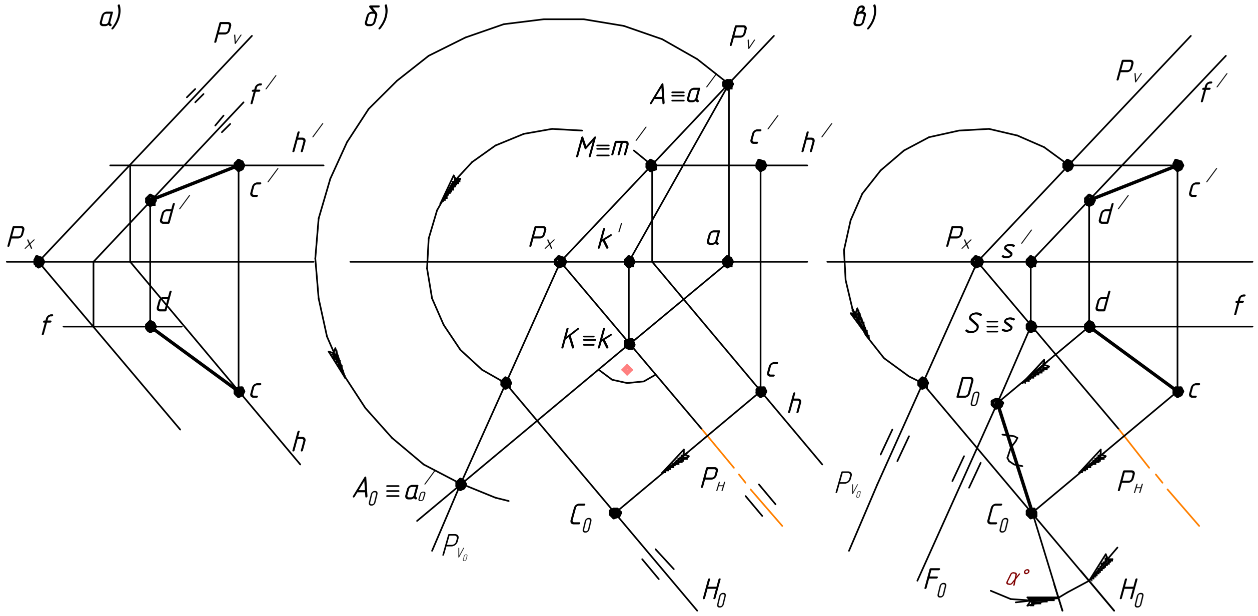


Рисунок 164 – Эпюр, способ совмещения

Решение.

1 – Произвольно проведем линию наклона (ската) плоскости, найдем проекции этой линии (рис. 164, *б*).

2 – Через точку C проведем горизонталь плоскости. Определим проекции горизонтали плоскости. В совмещении горизонталь пройдет как по определению параллельно горизонтальному следу, достаточно найти одну проекцию точки горизонтали и провести через нее горизонталь параллельно горизонтальному следу плоскости. Возьмем фронтальный след горизонтали плоскости, он будет лежать на одноименном следе плоскости на рис. 164, *б* точка M. Точку M перенесем на совмещенный след плоскости и через полученную точку проведем горизонталь плоскости. На основании взаимного положения прямой и точки находим точку C_0.

3 – Через точку D проведем фронталь плоскости (также можно провести и горизонталь плоскости). В совмещении фронталь пройдет параллельно фронтальному следу. Найдем горизонтальный след прямой фронтали и в совмещении проведем через горизонтальный след прямой точку S параллельно P_{V_0} (рис. 164, *в*). На основании взаимного положения прямой и точки находим точку D_0. Соединив точку C_0 с точкой D_0, получаем натуральную величину отрезка и угол α – угол наклона к горизонтальной плоскости проекций.

II. Вращение вокруг фронтального следа плоскости (рис. 165)

При совмещении плоскости P с фронтальной плоскостью проекций линия наклона плоскости и горизонтальный след плоскости дают истинный вид, натуральную величину прямых. Линия наклона плоскости является радиусом вращения при совмещении с фронтальной плоскостью проекций, эпюра (рис. 166).

$P_xA = P_xA_0$; $KA_1 = KA_0$.

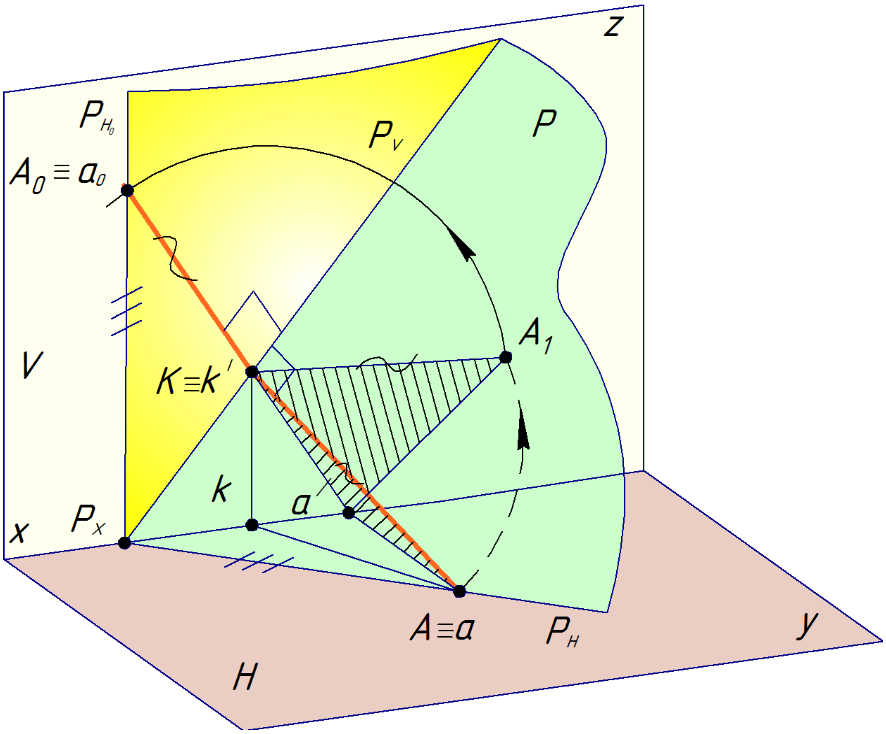


Рисунок 165 – Проецирующий аппарат, способ совмещения

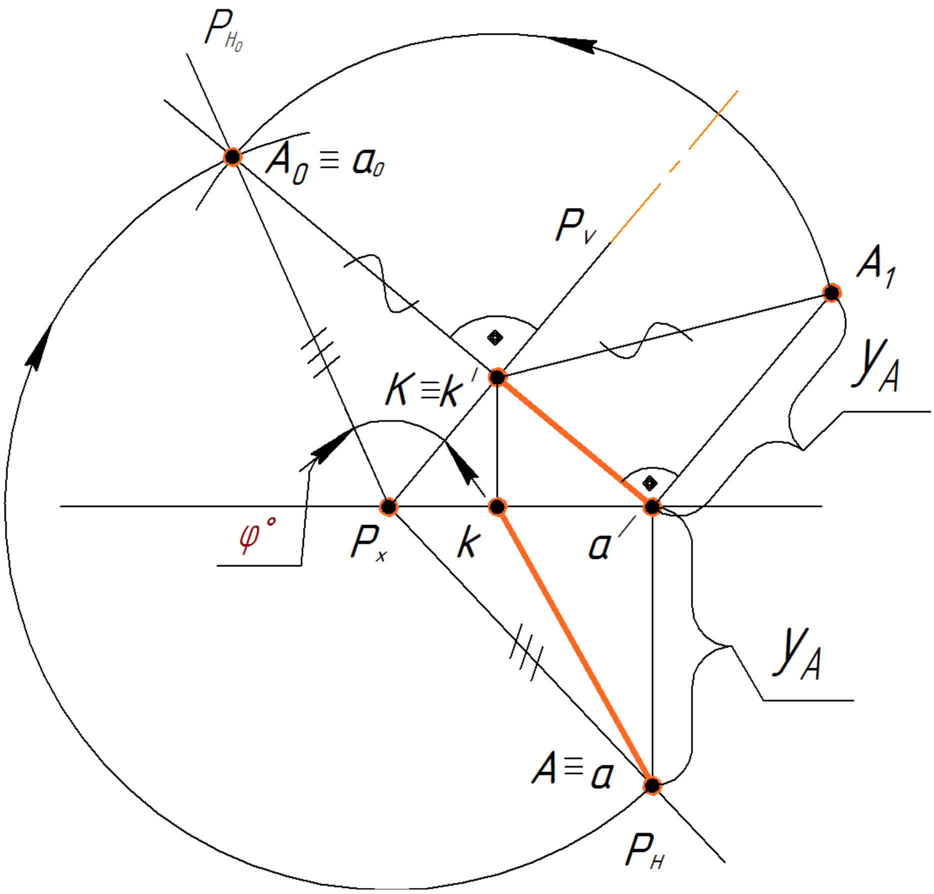


Рисунок 166 – Эпюр, способ совмещения:
φ^0 – угол, образованный следами плоскости

Пример. Дана плоскость *P* общего положения и точка *O* – центр основания конуса. Требуется построить проекцию круга основания конуса диаметром основания 24 мм (рис. 167).

Решение.

1 – Через точку O проведем главные линии плоскости – фронталь, горизонталь плоскости и линии наклона к плоскостям проекций, рис. 167, *а*.

2 – Совместим плоскость P с фронтальной плоскостью проекций, построим главные линии плоскости, рис. 167, *б*.

3 – Через точку O_0 построим окружность $\varnothing 24$, т. к. изображение основания фигуры дает истинный вид. Точки пересечения окружности с главными линиями плоскости переводим на одноименные проекции. Через точки 7_0 и 3_0 проводим дополнительные горизонтали плоскости.

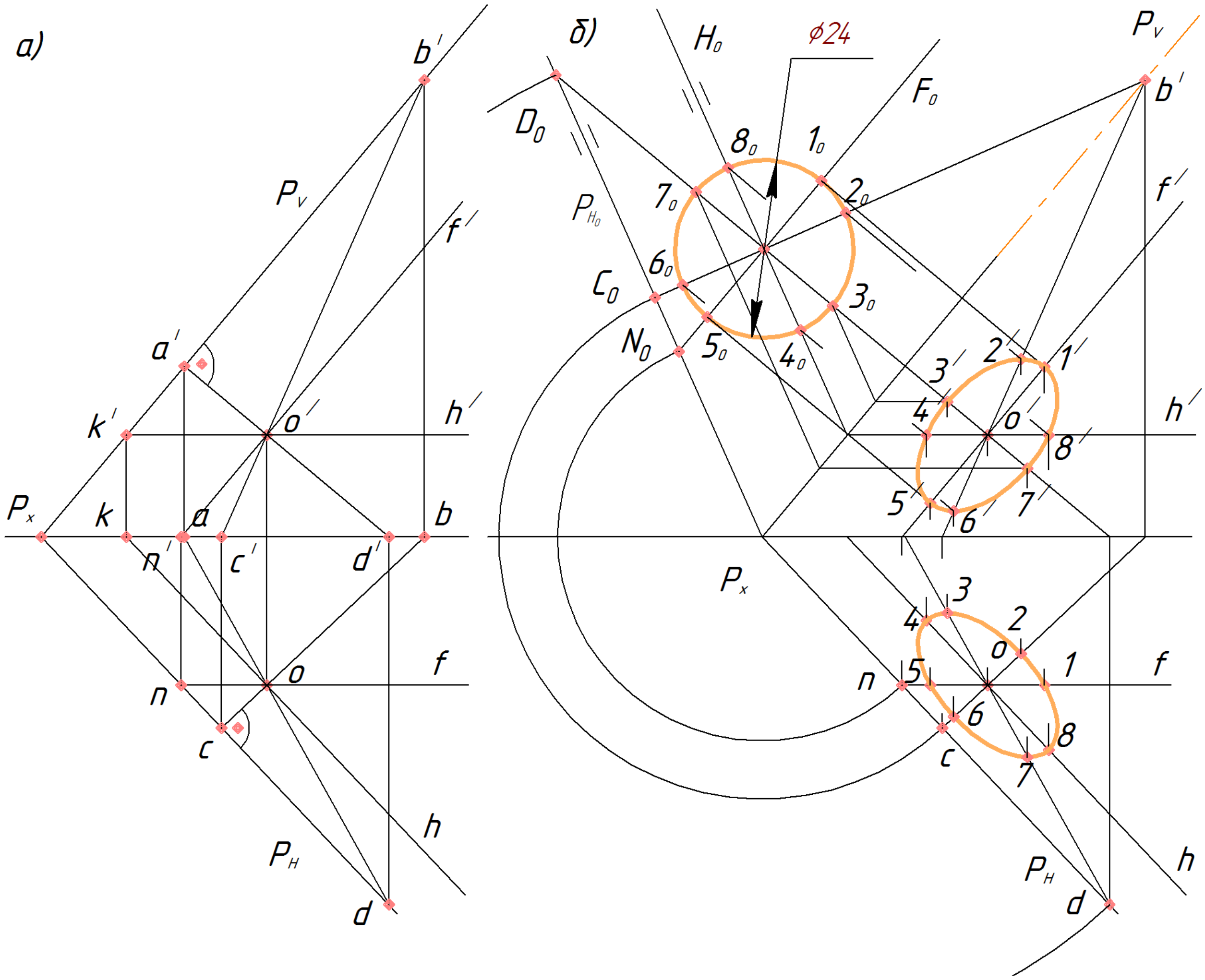


Рисунок 167 – Эпюр, способ совмещения

Контрольные вопросы к теме 5

1. Перечислите способы преобразования проекций.
2. В чем заключается способ прямоугольного треугольника?
3. В чем заключается способ перемены плоскостей проекций?
4. В чем заключается способ вращения?
5. В чем заключается способ плоскопараллельного перемещения?
6. В чем заключается способ совмещения?

Тема 6 Аксонометрические проекции

6.1 Общие сведения

Аксонометрическая проекция (*греч.* *άχоπ* – «*ось*» и «*метрия*») – способ изображения геометрических предметов на чертеже при помощи параллельных проекций.

Предмет (призма четырехугольная) с системой координат, рис. 168, к которой он отнесен, проецируют на произвольную плоскость (картинная плоскость аксонометрической проекции P_A) таким образом, чтобы эта плоскость не совпадала с его координатной плоскостью. В этом случае получается две взаимосвязанные проекции одной фигуры на одну плоскость, что позволяет восстановить положение в пространстве, получив наглядное изображение предмета. Так как картинная плоскость не параллельна ни одной из координатных осей, то имеются искажения отрезков по длине параллельных координатным осям:

$$\frac{x_B}{x_{B_A}} = k_x = k;\ \frac{y_B}{y_{B_A}} = k_y = m;\ \frac{z_B}{z_{B_A}} = k_z = n.$$

Основное уравнение аксонометрии: $k^2 + m^2 + n^2 = 2$.

Это искажение может быть равным по всем трем осям – изометрическая проекция $(k = m = n)$; одинаковыми по двум осям – диметрическая проекция $(k = n \neq m)$; и с искажениями разными по всем трем осям – триметрическая проекция $(k \neq m \neq n)$.

Стандартизированные аксонометрические проекции по ГОСТ 2.317-69

Прямоугольная проекция (направление проецирования перпендикулярно к аксонометрической плоскости проекции P_A):

- прямоугольная изометрическая проекция;
- прямоугольная диметрическая проекция.

Косоугольная проекция (направление проецирования не перпендикулярно к плоскости проекции):

- фронтальная изометрическая проекция;
- фронтальная диметрическая проекция;
- горизонтальная изометрическая проекция.

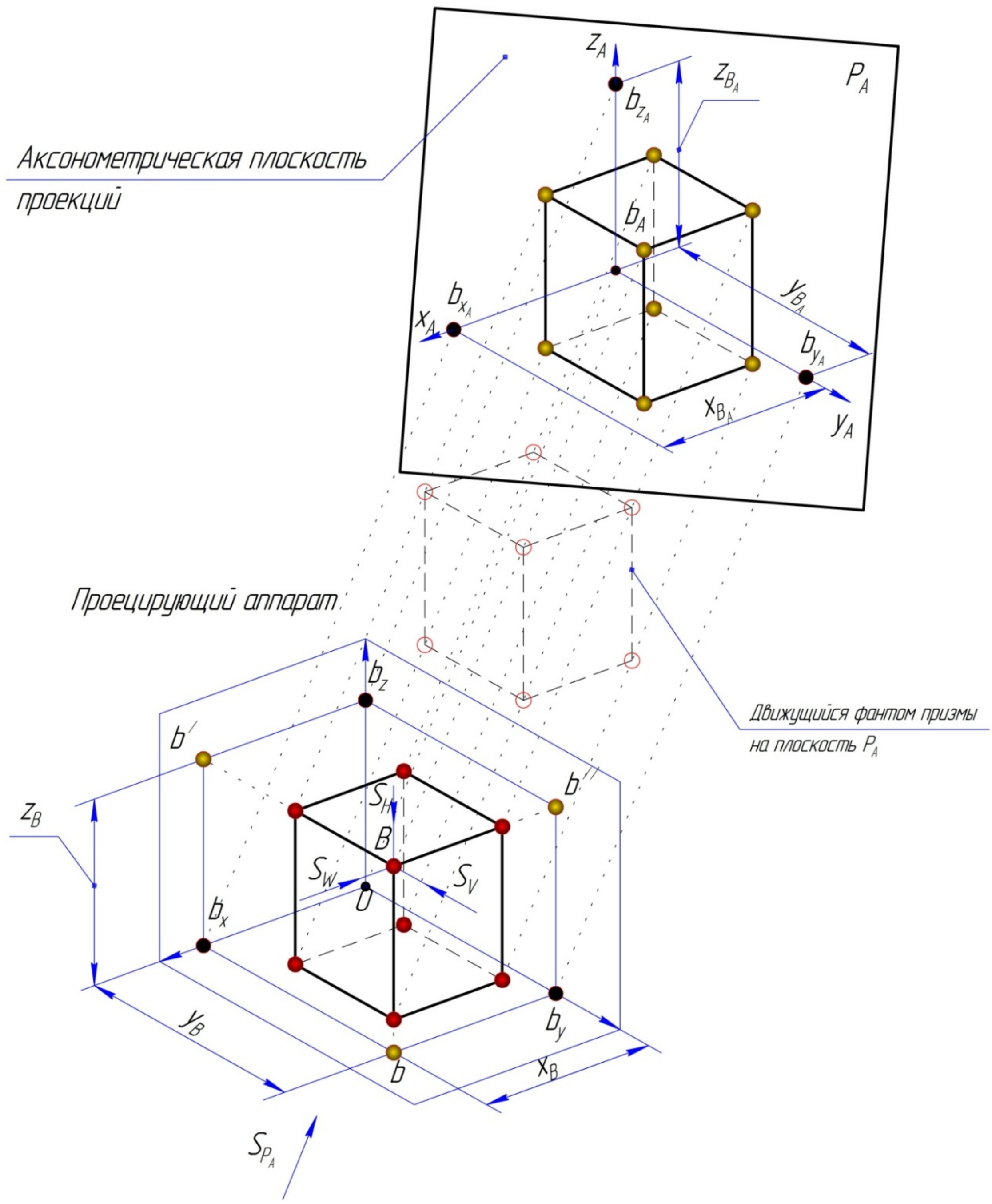


Рисунок 168 – Процесс проецирования аппарата (трех плоскостей проекций), включая призму, на картинную плоскость: S – луч проецирования на плоскость проекций; P_A – аксонометрическая плоскость проекций

6.2 Прямоугольные (ортогональные) проекции

I. Прямоугольная изометрическая проекция

В прямоугольной изометрической проекции аксонометрические оси образуют между собой углы в 120°, проекция оси z_A направлена всегда вертикально. Коэффициенты искажения $k_x = k_y = k_z = k$ имеют одинаковое значение числовое значение $k^2 + k^2 + k^2 = 2;\ k = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82$. Как правило, *для упрощения построений изометрическую проекцию выполняют без искажений по осям, т. е. коэффициент* *искажения принимают равным 1, в этом случае получают увеличение линейных размеров в* $\frac{1}{0,82} \approx 1,22$ *раза.*

Пример. Известны ортогональные проекции детали (рис. 169). Построить прямоугольную изометрическую проекцию детали, также необходимо убрать четверть детали. Для построения примем коэффициент искажения по осям равным 1.

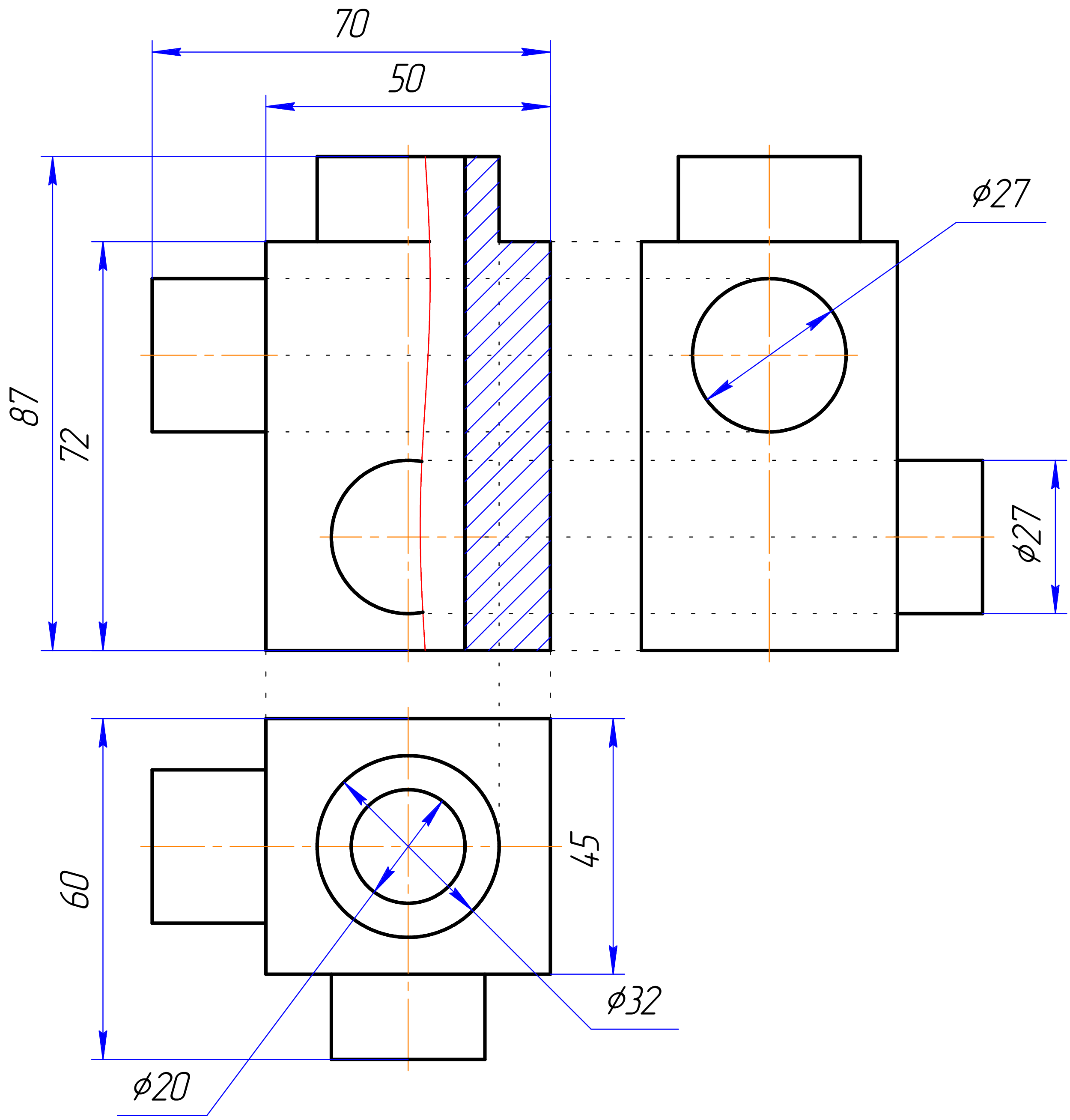


Рисунок 169 – Комплексный чертеж детали (ортогональные проекции)

Решение.

1 – Прочертим проекции координатных осей, рис. 170, зная их расположение.

2 – На ортогональных проекциях произвольно примем точку отсчета, т. е. 0, и проведем координатные оси. Также укажем проекции точек центров окружностей цифрами (рис. 171).

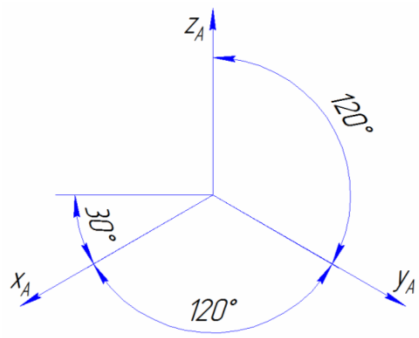


Рисунок 170 – Расположение координатных осей

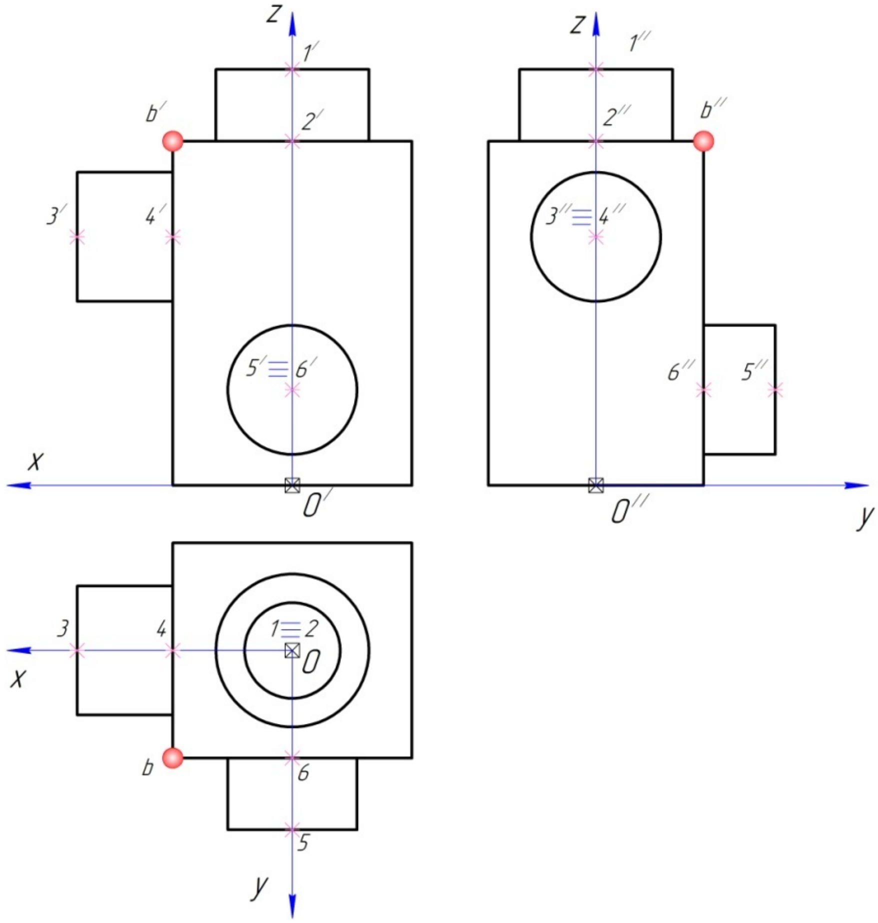


Рисунок 171 – Чертеж. Точка отсчета и проекции центра круга

3 – Построим точку B, наглядное изображение, рис. 172. Для этого измеряем координаты *x, y, z* точки циркулем на ортогональных проекциях и переносим размеры на оси аксонометрии.

4 – Аналогично строим все вершины призмы путем измерения осей, рис. 173. Соединив вершины точек, получаем наглядное изображение призмы.

5 – Для построения окружностей цилиндров в плоскостях призмы необходимо понимать, что каждая окружность (основание цилиндра) находится в плоскости проекций или в плоскостях уровня, которые наклонены к плоскости аксонометрии P_A и окружности в этих плоскостях проецируются в эллипсы. Построение эллипса в трех плоскостях проекций показано на рис. 174. Построение детали на рис. 175 и 176, достаточно найти центр окружности и относительно каждого центра построить эллипс, лежащий в координатной плоскости.

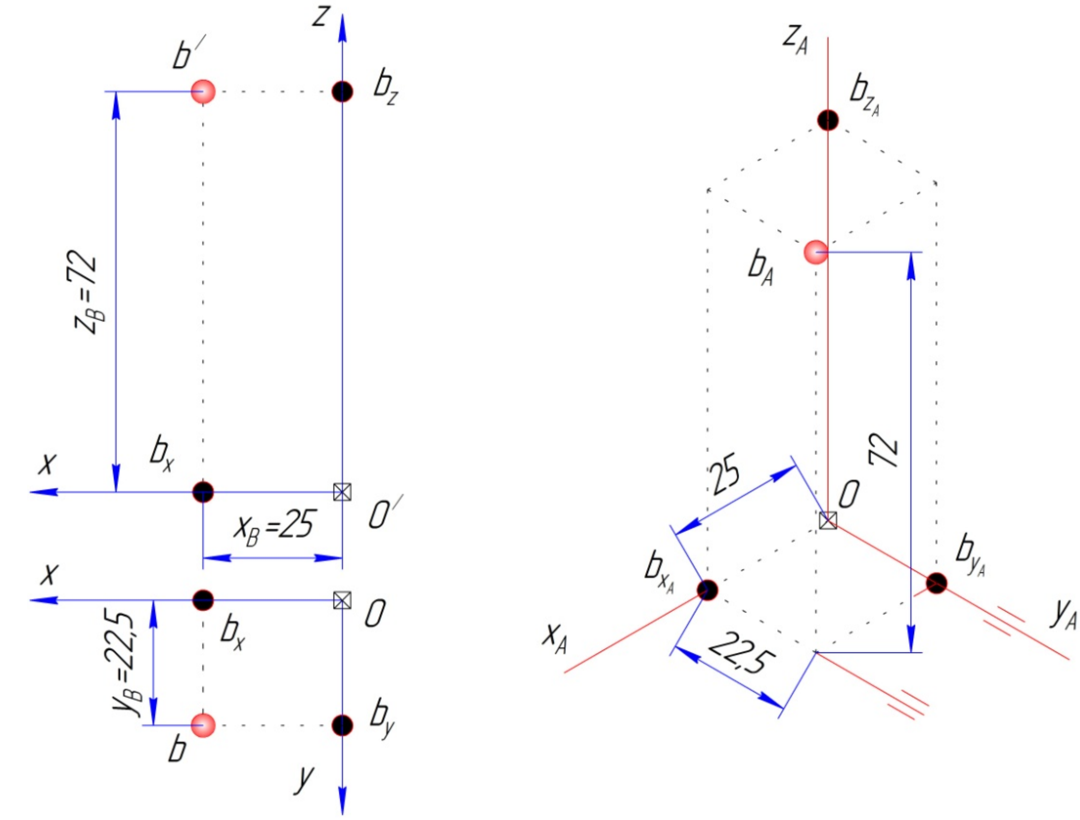


Рисунок 172 – Построение наглядного изображения точки

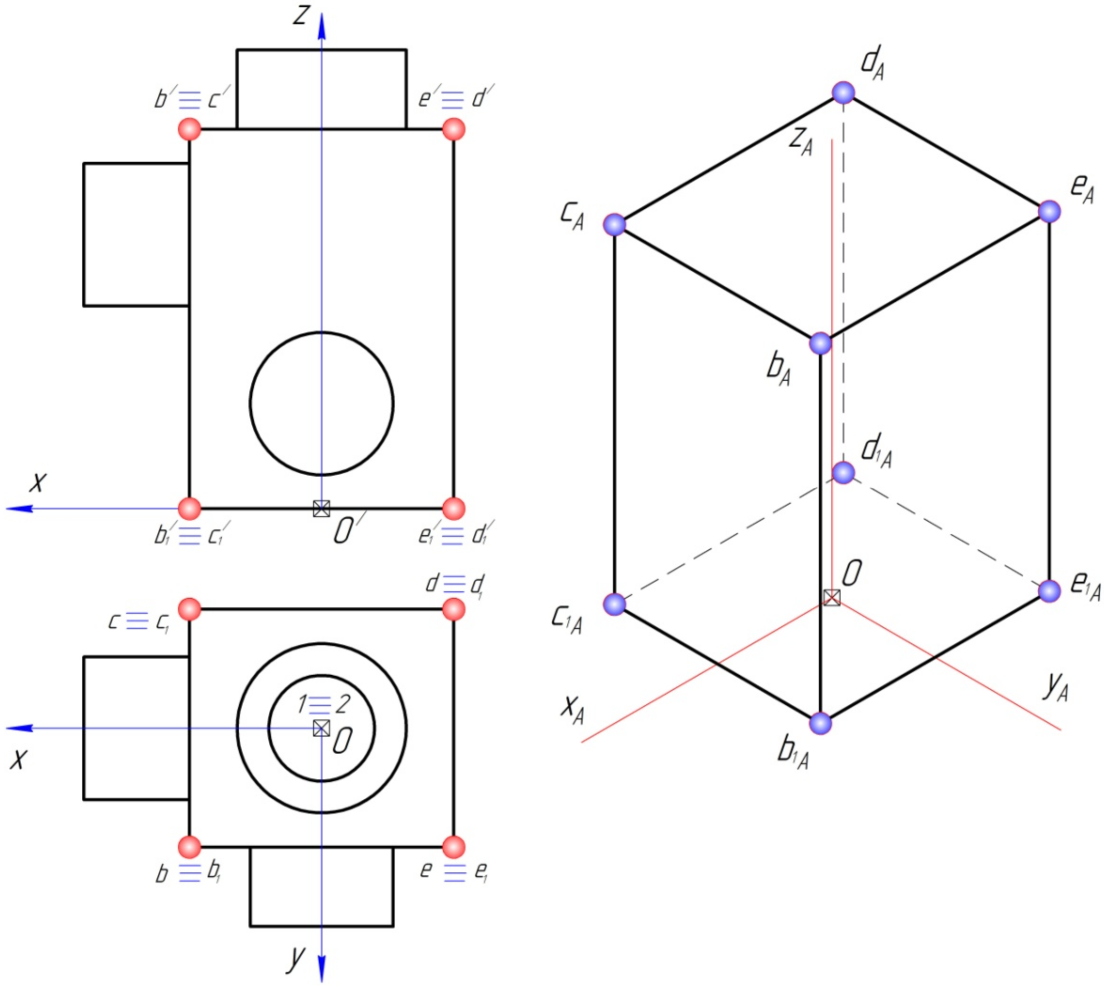


Рисунок 173 – Построение наглядного изображения призмы

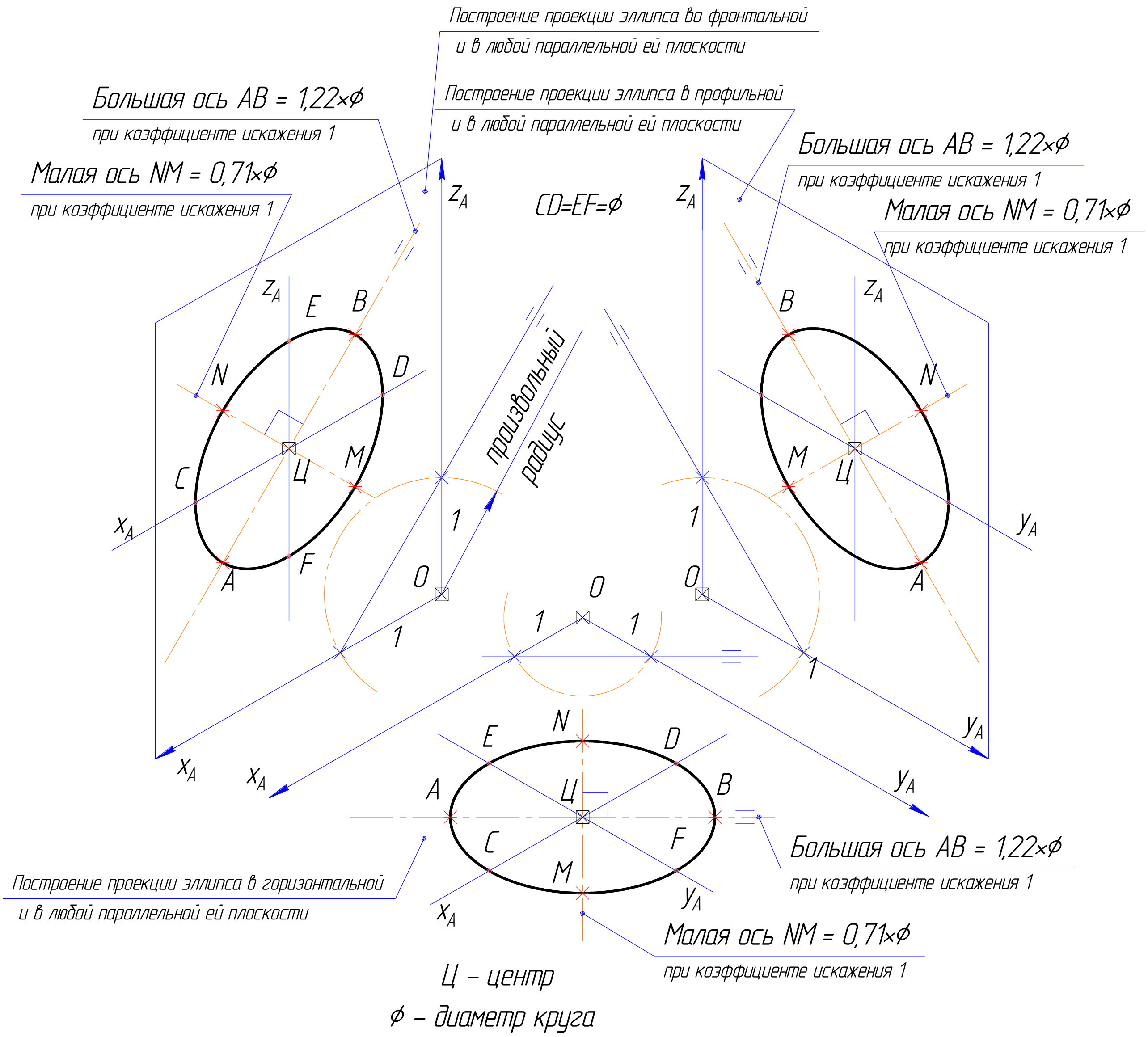


Рисунок 174 – Прямоугольная изометрия. Способ построения эллипсов в каждой плоскости проекций или уровня при коэффициенте искажения по осям, равным 1

6 – Аксонометрический разрез. Позволяет отобразить не только внешний вид изделия, детали, но и его внутреннюю часть с помощью разрезов. Они осуществляются не одной, а двумя или тремя плоскостями, каждая из которых всегда параллельна плоскости проекций. Выбор разреза определяется необходимостью изображения внутренней конфигурации детали. Изображения в секущих плоскостях штрихуются.

Направление штриховки в каждой из основных аксонометрических плоскостей различное, и его легко получить, если по осям с учетом коэффициентов искажения от начала координат отложить натуральный единичный отрезок, соединив его концы прямыми линиями. Направление этих прямых и определяет направление штриховки в соответствующих основных плоскостях, который называется треугольником штриховки (рис. 177).

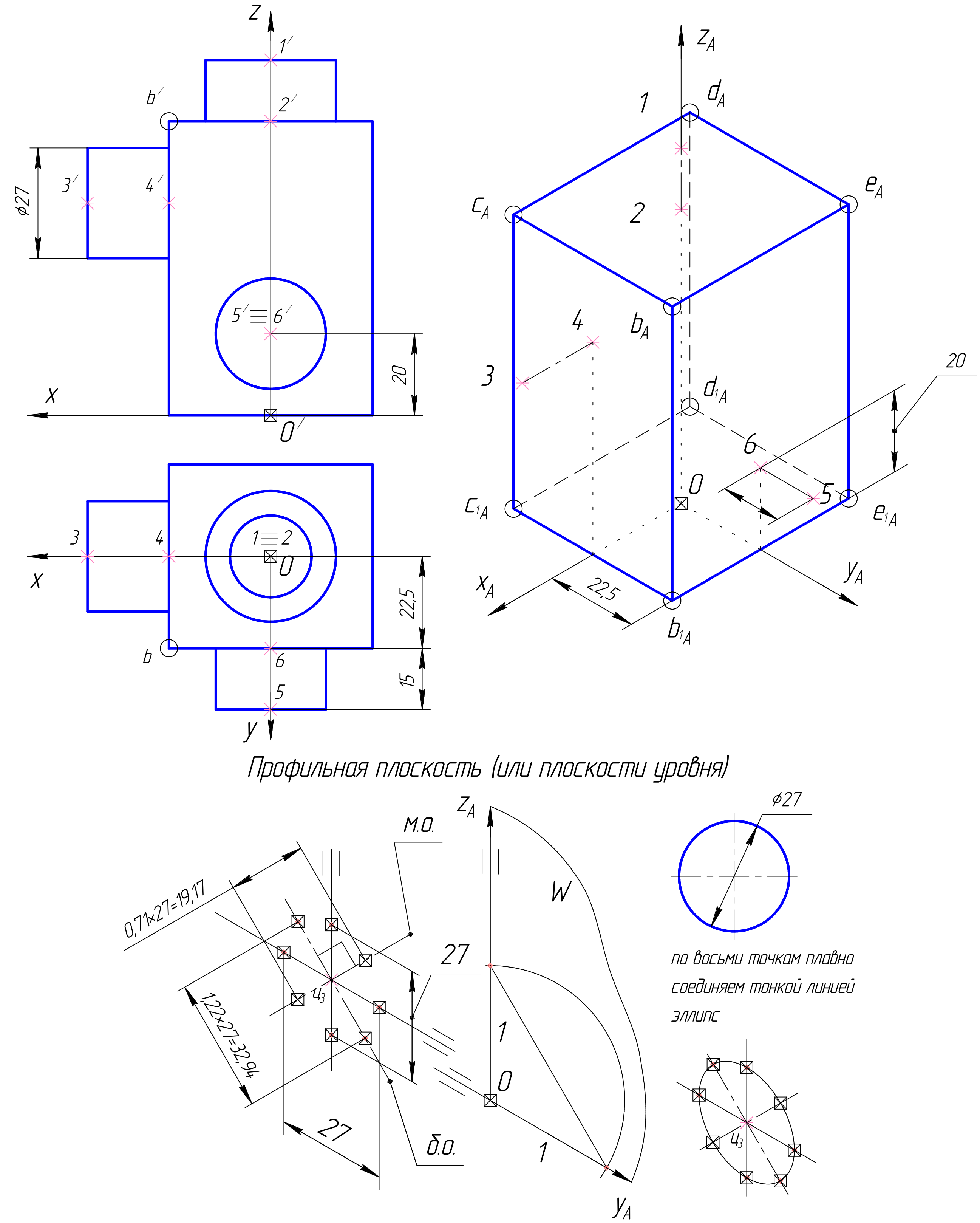


Рисунок 175 – Построение эллипса в профильной плоскости

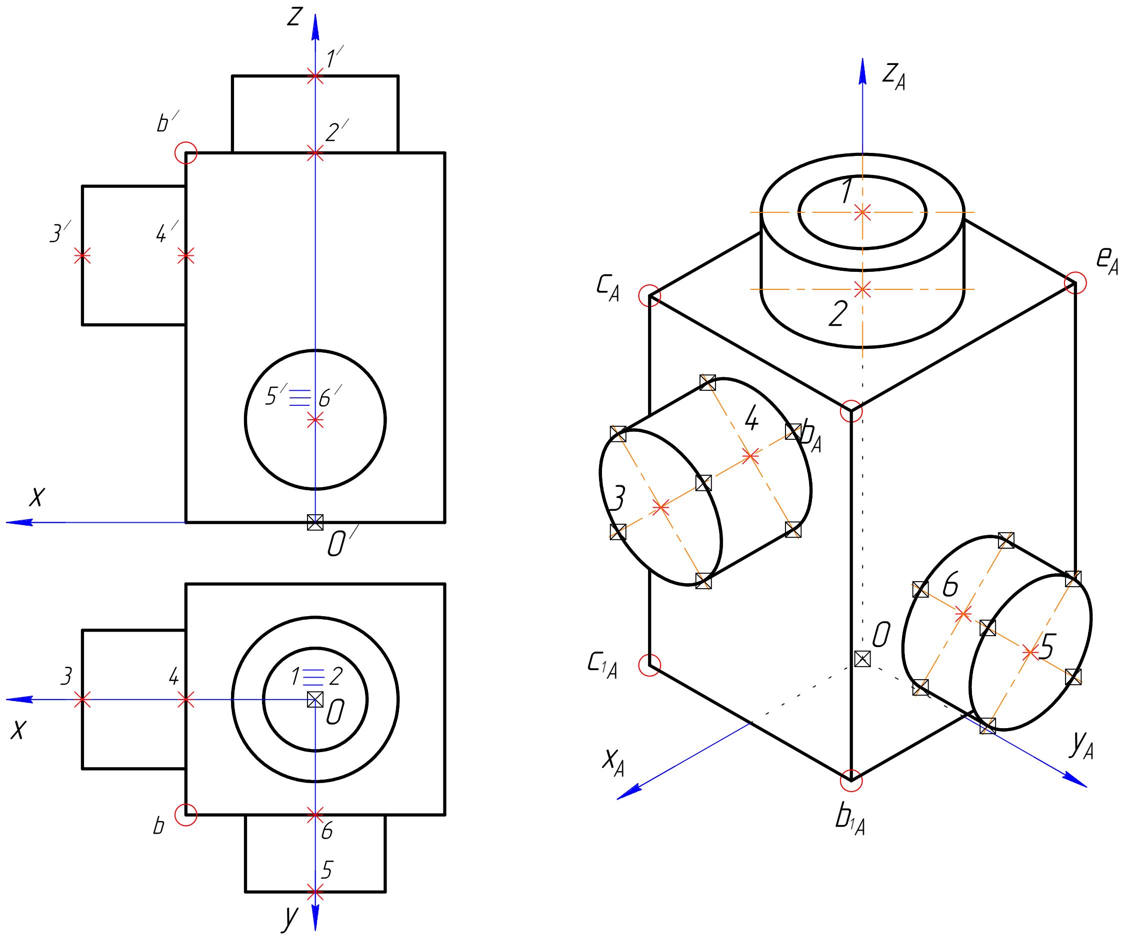


Рисунок 176 – Построение детали без выреза

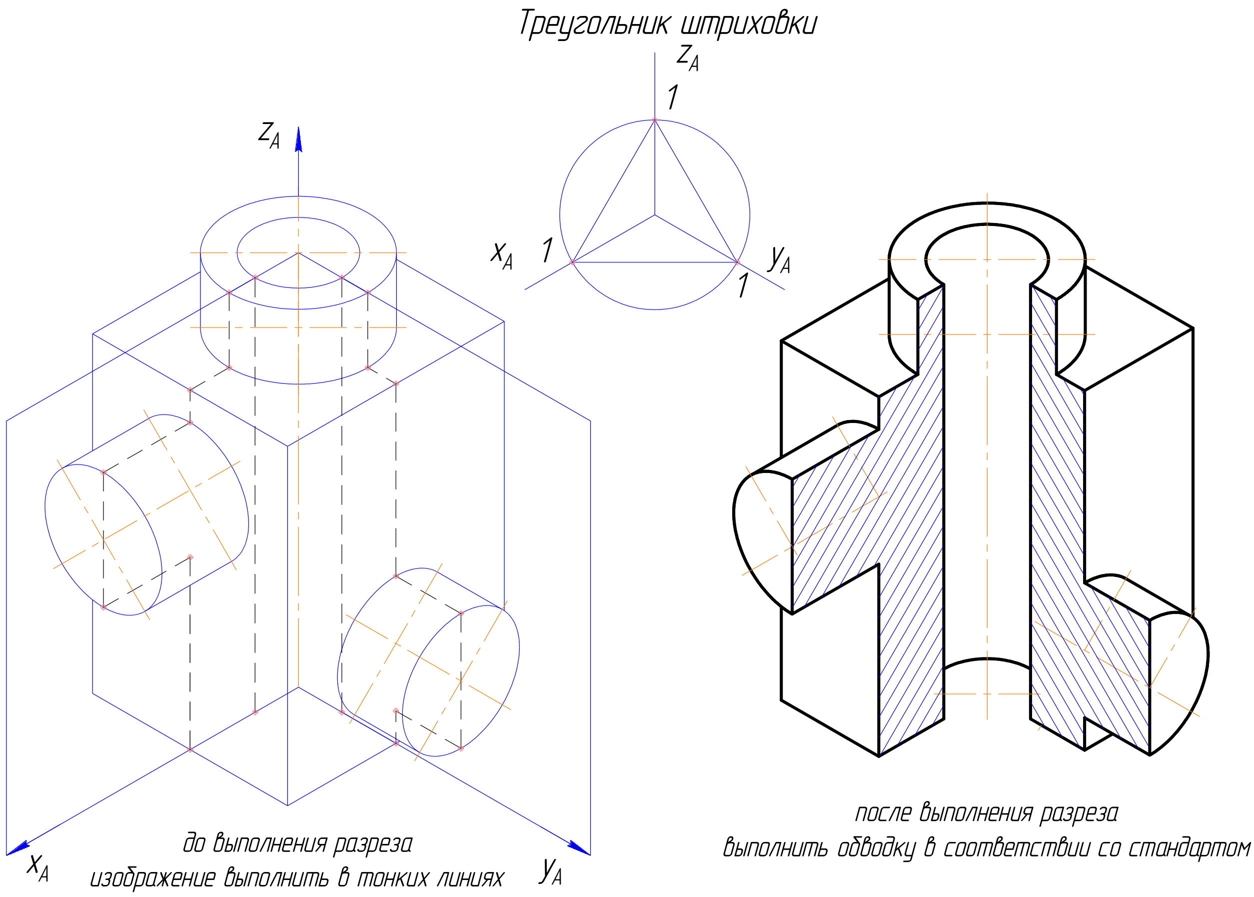


Рисунок 177 – Аксонометрический разрез

II. Прямоугольная диметрическая проекция

Ось z_A расположена вертикально, а x_A оси и y_A образуют с горизонтальной линией углы 7°10' и 41°25' (рис. 178).

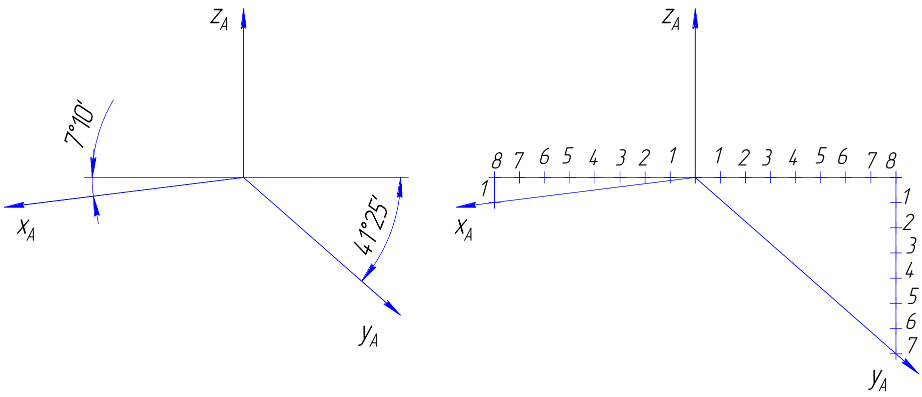


Рисунок 178 – Расположение осей координат в прямоугольной диметрической проекции

Коэффициент искажения по оси y_A равен 0,47, а по осям x_A и z_A равен 0,94. На практике используют приведенные коэффициенты искажения $k_x = k_z = 1$ и $k_y = \frac{1}{2}$.

В этом случае изображение получается увеличенным в $\frac{1}{0{,}94} = 1{,}06$ раза.

$k^2 + \left(\frac{1}{2}k\right)^2 + k^2 = 2;\ k = \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0{,}94.$

Положение окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, для прямоугольной диметрии (рис. 180).

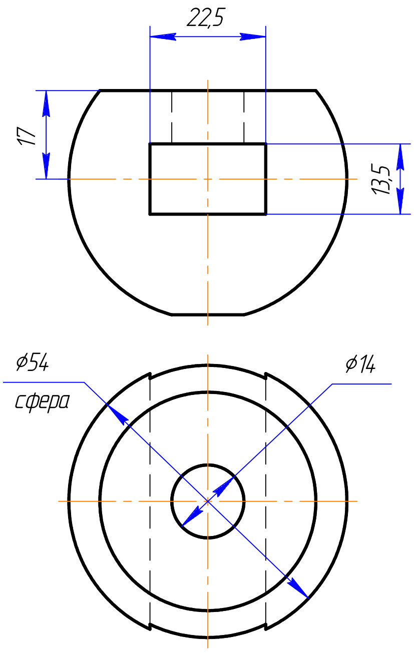


Рисунок 179 – Задание

Пример. Известны ортогональные проекции детали, рис. 179. Построить прямоугольную диметрическую проекцию, убрать четверть детали. Для построения примем коэффициент искажения по осям равный 1.

Решение.

1 – Построение аналогично решению детали в прямоугольной изометрии, отличие в расположении координатных осей и коэффициентов искажения.

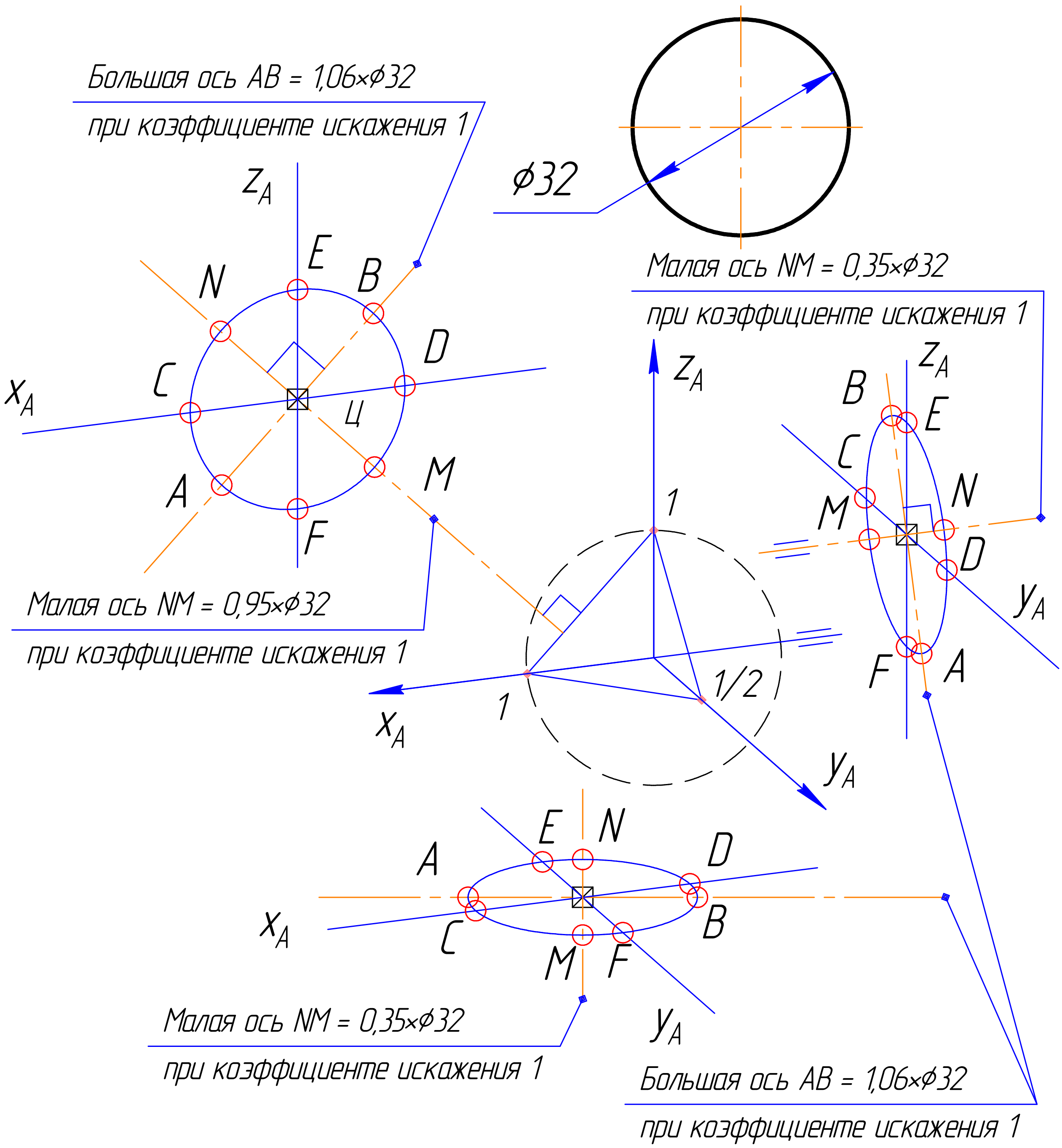


Рисунок 180 – Прямоугольная диметрия. Способ построения эллипсов в каждой плоскости проекций или уровня при коэффициенте искажения по осям, равном 1

2 – Два отверстия в шаре сквозные, одно цилиндрическое, другое призматическое. Построение начинаем с обозначения центра эллипса и его построения (рис. 181).

3 – Окончательный вариант изображения с аксонометрическим разрезом показан на рис. 182.

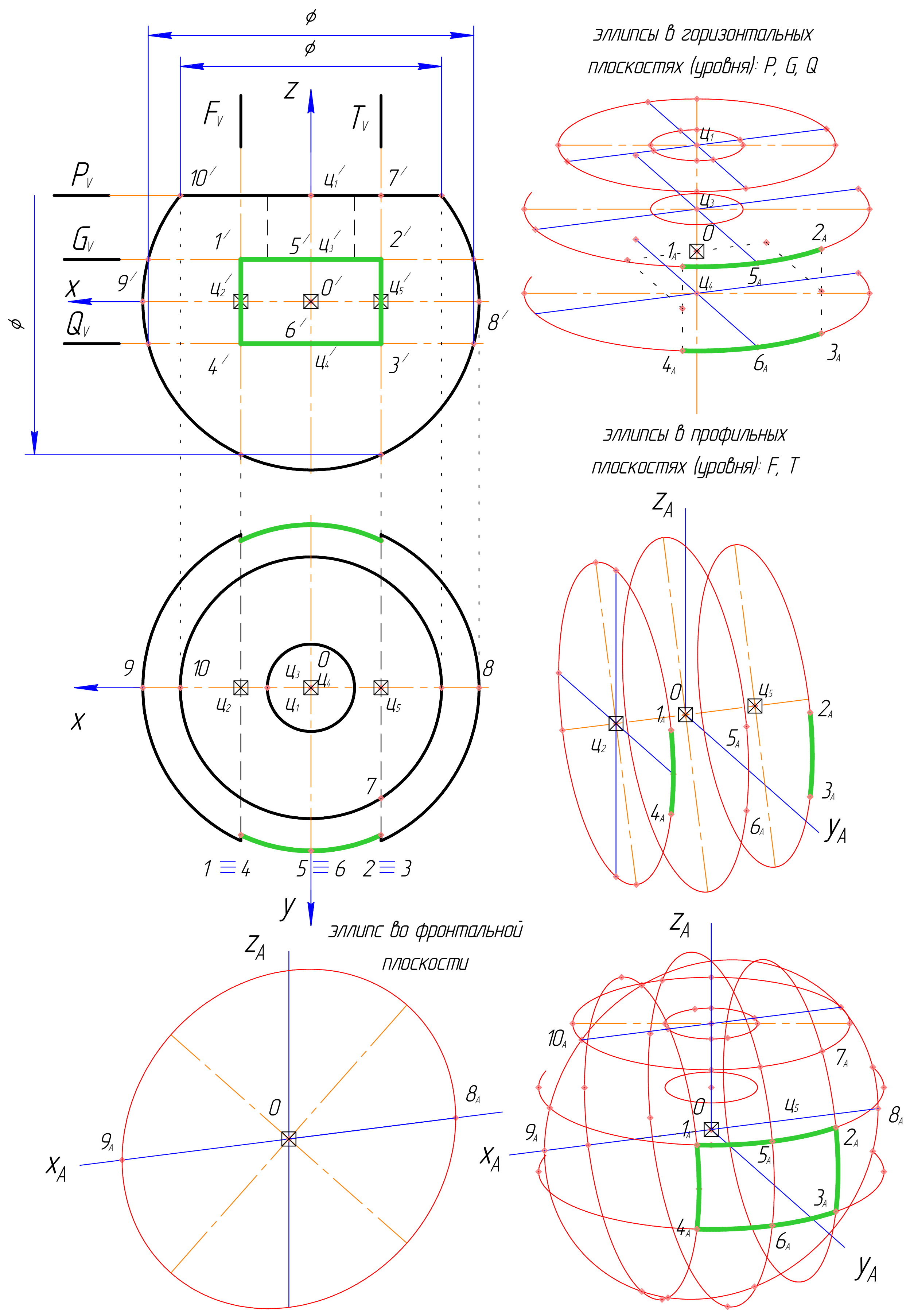


Рисунок 181 – Прямоугольная диметрия. Порядок построения

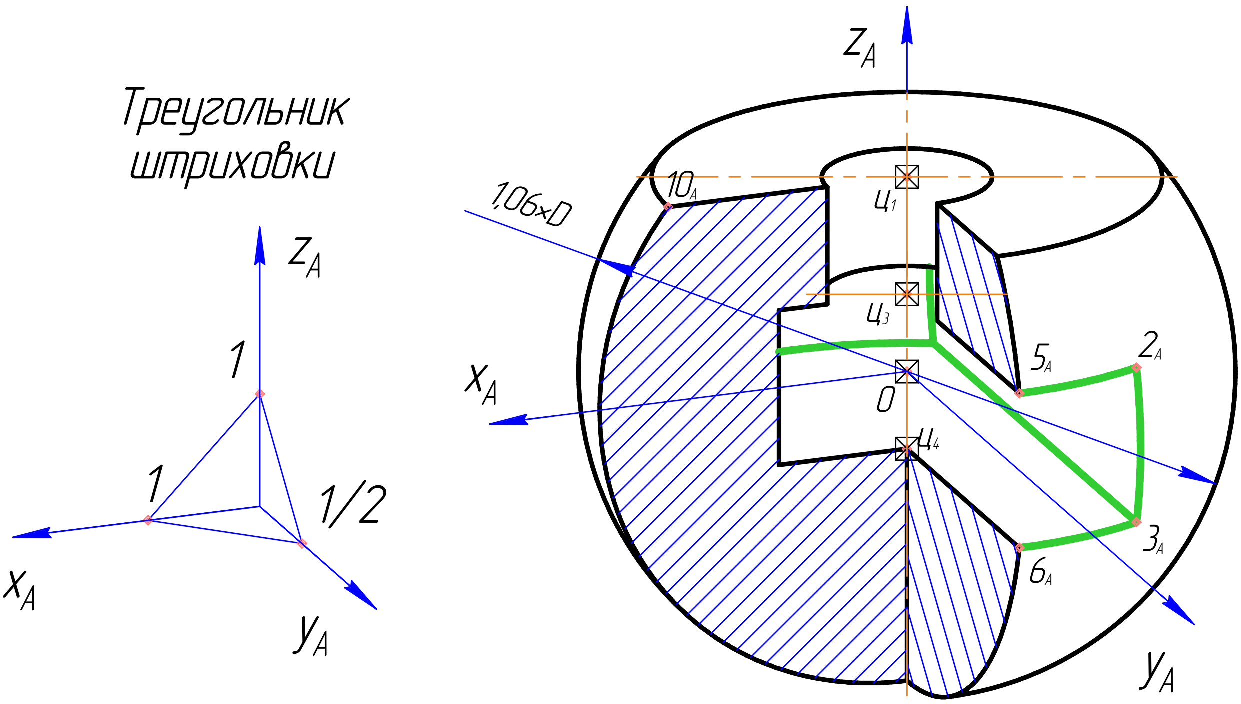


Рисунок 182 – Прямоугольная диметрия. Окончательный результат

6.3 Косоугольные аксонометрические проекции

I. Косоугольная фронтальная изометрическая проекция

Оси x_A y_A z_A этой аксонометрической проекции взаимно перпендикулярны (рис. 183). Ось y_A чаще всего располагается под углом $45°$ к горизонтальной прямой, но допускается расположение под углами $30°$ и 60°.

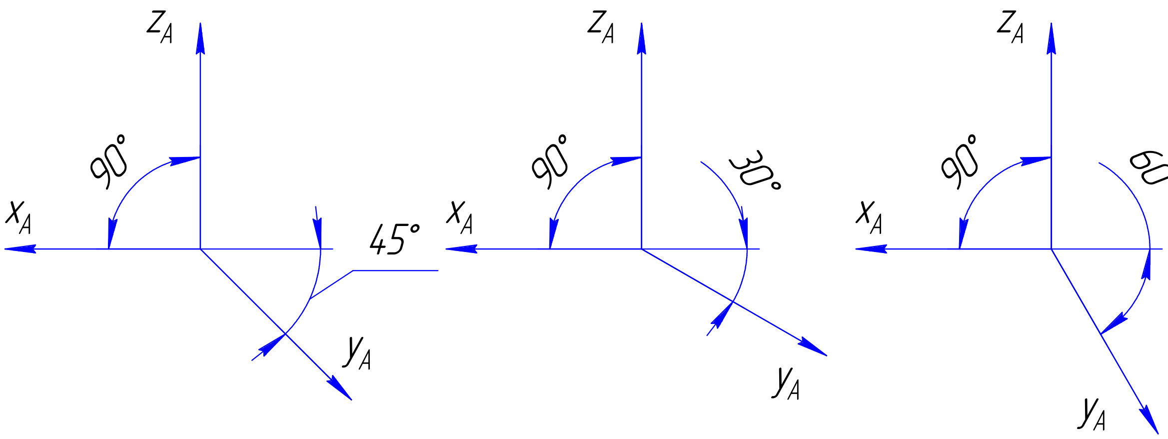


Рисунок 183 – Проекции координатных осей

Фронтальная изометрическая проекция выполняется без искажения по осям, и коэффициенты искажения принимаются равными единице. Изображения в этой аксонометрии вычерчиваются аналогично рассмотренным ранее. При этом фронтально расположенные плоские фигуры проецируются без искажения (рис. 184). Для горизонтально и профильно расположенных фигур сохраняются расстояния вдоль осей, но сами они проецируются с искажением. Так, горизонтальные и профильные окружности проецируются в эллипсы (рис. 184). Если ось y_A расположена под углом $45°$ к горизонтальной прямой, то большие оси эллипсов равны 1,3 диаметра вычерчиваемой окружности и наклонены под углом $22°30'$ к осям фронтальной плоскости (для горизонтального эллипса – к оси x_A, для профильного – z_A. Малые оси перпендикулярны большим и равны 0,54*d*.

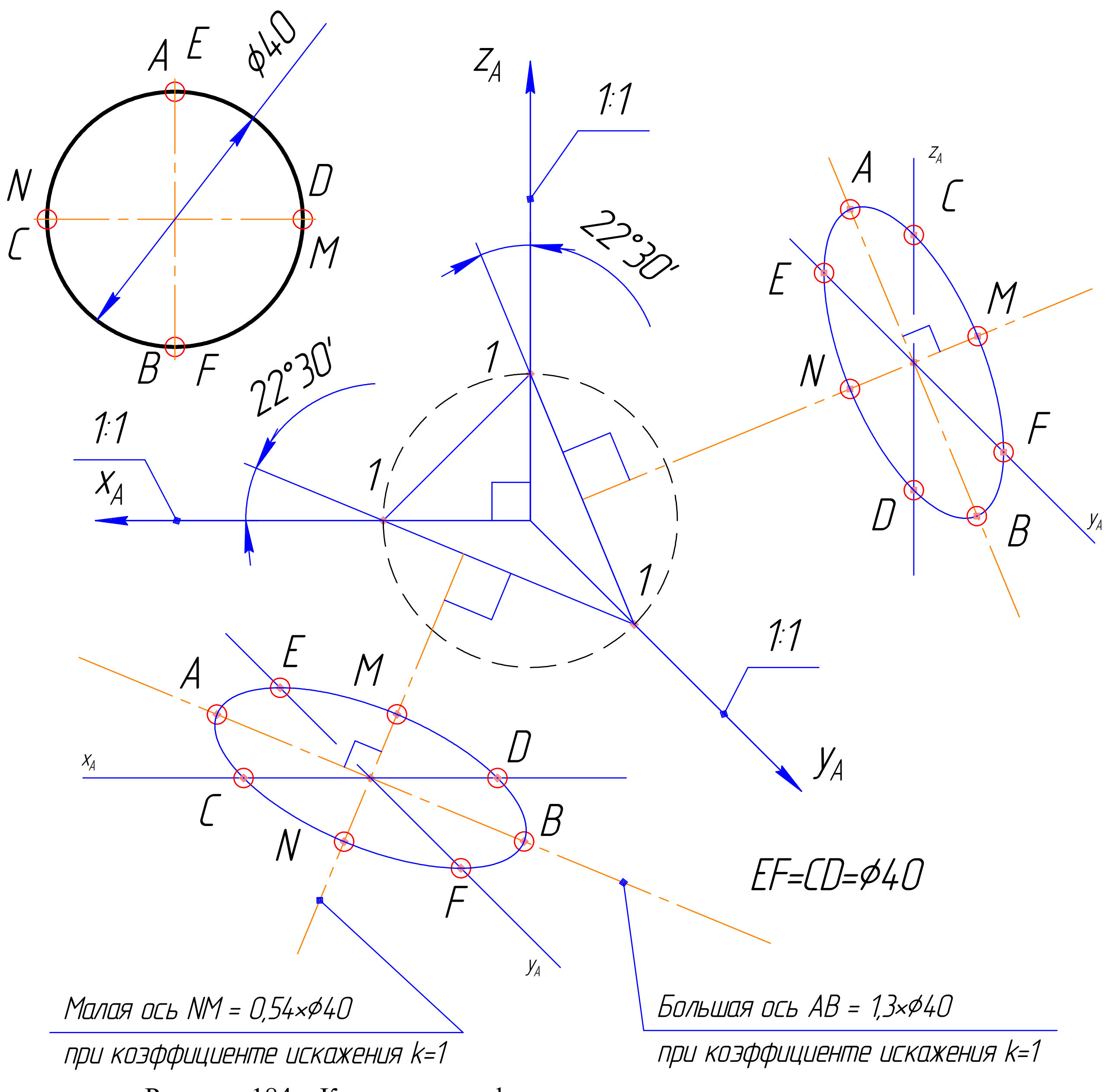


Рисунок 184 – Косоугольная фронтальная изометрическая проекция. Вычерчивание эллипсов по восьми точкам

II. Косоугольная горизонтальная изометрическая проекция

Ось z_A этой проекции располагается вертикально. Угол между осями горизонтальной плоскости (x_A и y_A) равен 90°. Причем, ось y_A расположена к горизонтальной прямой под углом в 30° (допускаются углы наклона в 60° и 45°, но при обязательном сохранении прямого угла между осями x_A и y_A).

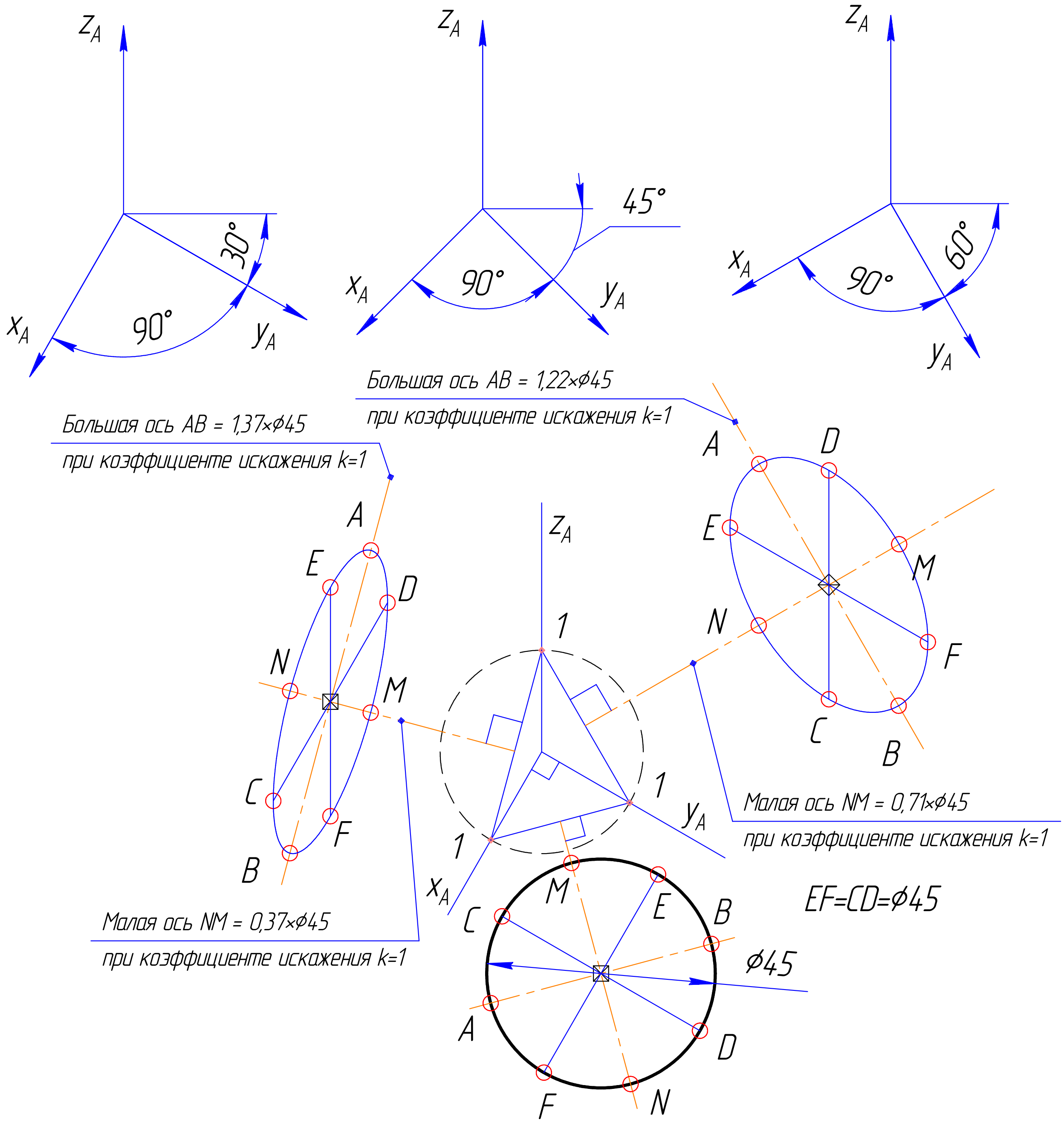


Рисунок 185 – Косоугольная горизонтальная изометрическая проекция

При выполнении горизонтальной изометрии коэффициенты искажения по всем трем осям принимаются равными единице. Любая горизонтально расположенная плоская фигура проецируется на горизонтальную аксонометрическую плоскость без искажения (рис. 185). Фронтальное и профильное расположение фигуры, сохраняя равенство размеров элементов вдоль осей этой изометрии, искажается. Окружности, параллельные фронтальной и профильной плоскостям проекций, проецируются в эллипсы.

Большая ось эллипса, параллельная фронтальной плоскости, равна 1,37d. Малая ось перпендикулярна большой оси и равна 0,37d.

У эллипса, параллельного профильной плоскости, как и в прямоугольной изометрии, большая ось равна l,22*d*. Малая ось перпендикулярна большой оси и равна 0,71*d*.

III. Косоугольная фронтальная диметрическая проекция

Так как оси x_A, y_A, z_A основной системы параллельны аксонометрической плоскости, то во фронтальной диметрии, так же как и во фронтальной изометрии, угол между этими осями равен 90°. Ось y_A составляет с осями x_A и z_A углы в 135°. При выполнении изображений в такой аксонометрической проекции коэффициент искажения по оси y_A принимается равным 0,5, а по осям x_A и z_A – 1 (рис. 186).

Все элементы, расположенные во фронтальных плоскостях, проецируются без искажения, расположенные в других плоскостях – с искажением. Окружности, расположенные в горизонтальной и профильной плоскостях, проецируются в эллипсы. Большие оси эллипсов равны 1,07 диаметра вычерчиваемой окружности, а малые – 0,33*d*.

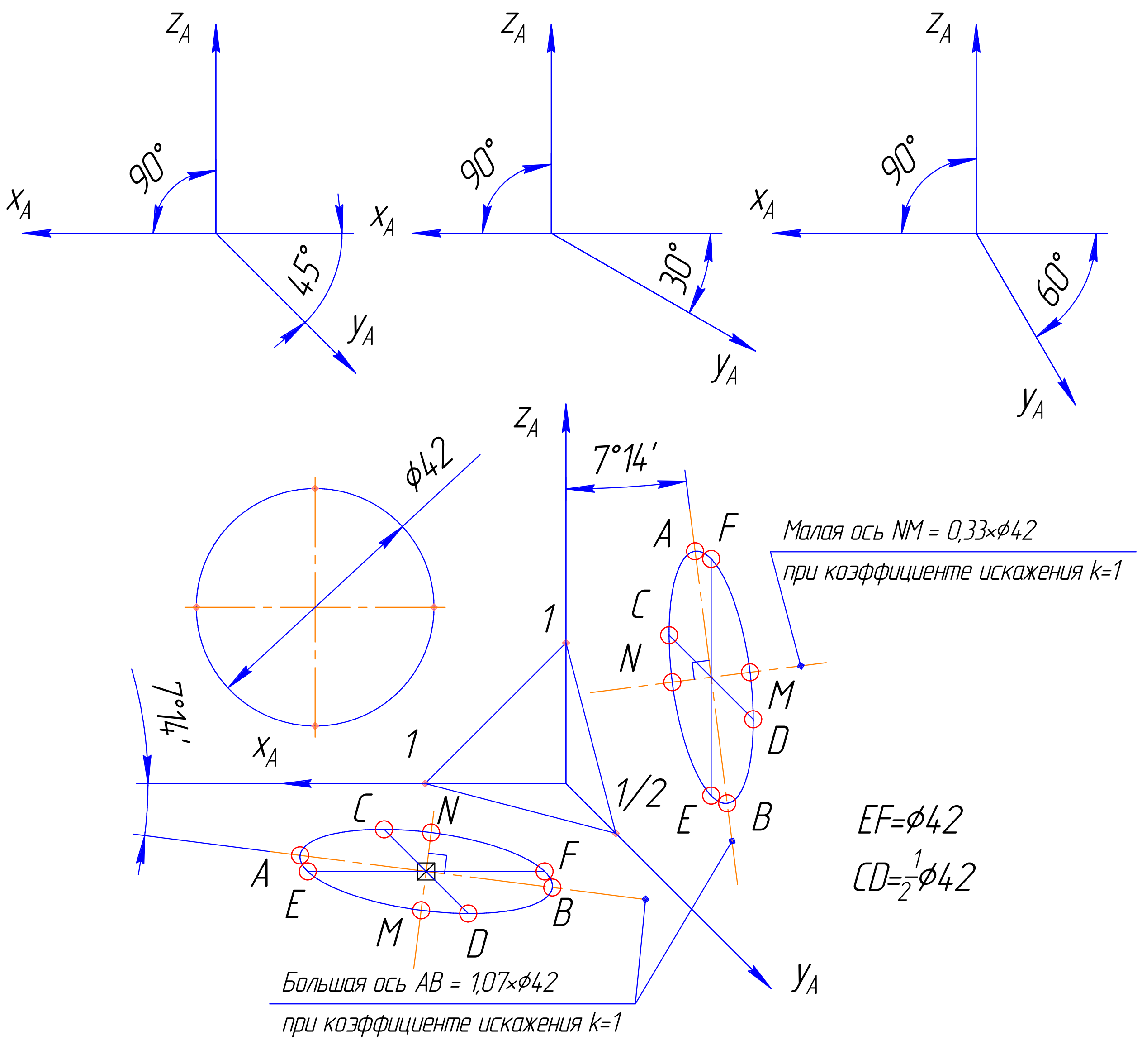


Рисунок 186 – Косоугольная фронтальная диметрическая проекция

Контрольные вопросы к теме 6

1. Какие проекции называются аксонометрическими?
2. Что называют коэффициентом искажения?
3. Что представляет собой треугольник штриховки?
4. Укажите значения коэффициентов искажения по направлениям осей в аксонометрических проекциях.
5. Укажите направления и величины осей эллипсов в изометрических и диметрических проекциях.

Заключение

Таким образом, в пособии рассмотрены все разделы курса начертательной геометрии, предусмотренные учебной программой. Изучив начертательную геометрию, студенты приобретают необходимые знания, умения и навыки, которые необходимы для овладения курсом инженерной графики, а в дальнейшем – при изучении общеинженерных и специальных дисциплин.

Несмотря на то, что современный процесс проектирования и конструирования изделий автоматизирован, начертательная геометрия формирует творческое мышление будущего специалиста. Инженер обязан мастерски владеть международным языком – языком чертежа, который был и остается одним из наиболее информативных языков техники.

Библиографический список

1. **Гордон, В. О.** Курс начертательной геометрии [Текст] : учебник для втузов / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский. – М., 2002. – 272 с.
2. **Фролов, С. А.** Начертательная геометрия. Сборник задач [Текст] : учебное пособие для студентов машиностроительных специальностей вузов / С. А. Фролов. – 3-е изд., испр. – М. : ИНФРА-М, 2008. – 172 с., ил. – (Высшее образование).
3. **Георгиевский, О. В.** Конспект лекций по начертательной геометрии [Текст] : методическое пособие для студентов строительных вузов / О. В. Георгиевский, Т. М. Кондратьева. – М. : Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2009. – 80 с.